1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 한라산은 제주도에 있다.

② 독도는 섬이 아니다.

③ 19 는 짝수이다.

④ 수학 책은 두껍다.

⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

해설

참인 명제 : ①, ⑤
거짓인 명제 : ②, ③
④의 경우 두껍다는 기준이 모호하므로 명제가 아니다.

2. 명제 '$a > b$ 이면 $a^2 \geq b^2$ 이다'의 대우를 구하면?

① $a^2 \geq b^2$ 이면 $a > b$이다　② $a^2 > b^2$ 이면 $a \geq b$이다

③ $a^2 < b^2$ 이면 $a \leq b$이다　④ $a \leq b$ 이면 $a^2 < b^2$이다

⑤ $a \geq b$ 이면 $a^2 > b^2$이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

$\therefore a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$

3. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 <u>않는</u> 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

4. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$, $27 \geq abc$

5. $x,\ y$가 실수이고 $x^2+y^2=10$일 때 $x+3y$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠 부등식에 의하여
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
이 때, $x^2+y^2=10$이므로
$100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore -10 \leq x+3y \leq 10$
(단, 등호는 $x=\frac{y}{3}$일 때 성립)
따라서 최댓값은 10이다.

6. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \neq 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$

② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$

③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$

④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \neq 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$

⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

7. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$　② $P^c \subset Q$　③ $Q \subset P^c$

④ $P \cup Q^c = U$　⑤ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

해설

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$P \subset Q^c$

$\Leftrightarrow (Q^c)^c \subset P^c$

$\Leftrightarrow Q \subset P^c$

8. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

9. 자연수 n 에 대하여 2^{4n}, 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \le 3^{3n}$

④ $2^{4n} \ge 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$

10. 양수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2>$, $b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$
(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)
그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \geq 2ab$
$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$
$\frac{1}{a^2}>0$, $\frac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$
$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}}=4$
(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)
따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

11. $x,\ y,\ z$ 가 실수일 때, 조건 $(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 의 부정과 동치인 것은?

① $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$

② $x,\ y,\ z$ 는 서로 다르다.

③ $x\neq y$ 이고 $y\neq z$

④ $(x-y)(y-z)(z-x)>0$

⑤ $x,\ y,\ z$ 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

해설

$(x-y)^2+(y-z)^2=0$ 이면 $x=y=z$ 이므로 이것의 부정은
$x\neq y$ 또는 $y\neq z$ 또는 $z\neq x$
즉, $x,\ y,\ z$ 중에 적어도 서로 다른 것이 있다.

12. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$　② $P \cup Q^c$　③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$　⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

'$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 'q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \varnothing$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

13. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

14. 다음 중 참인 명제의 개수는?

(가) 6 의 배수는 2 의 배수이다.
(나) 두 삼각형의 넓이가 같으면 합동이다.
(다) 소수는 모두 홀수이다.
(라) 평행사변형은 정사각형이다.
(마) 홀수의 집합은 덧셈에 대하여 닫혀 있다.
(바) 얼마나 아름다운 풍경인가?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

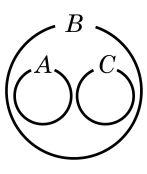
해설

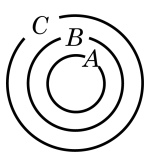
(가) 6 의 배수의 집합은 2 의 배수의 집합에 포함되므로 참이다.
(나) 두 삼각형의 넓이가 같아도 형태가 다를 수 있으므로 꼭 합동이 되지만은 않는다.
(다) 소수에는 2도 포함되므로 짝수도 있다.
(라) 정사각형의 집합이 평행사변형의 집합의 진부분집합이므로 거짓이다.
(마) 예를 들어 $3+5=8$ 즉, 짝수가 나오므로 닫혀있지 않다.
(바) 명제가 성립되지 않는다. ($\because$ 참, 거짓을 구분할 수 없다.)

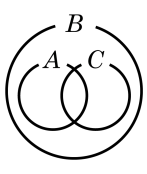
15. 다음의 두 명제 p, q 가 참일 때,

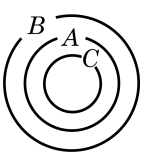
p : $x \in A$ 이면 $x \in B$ 이다.
q : $x \notin C$ 이면 $x \notin B$ 이다.

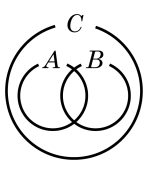
세 집합 A, B, C 사이의 포함관계를 벤다이어그램으로 옳게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

조건 p : $A \subset B$ 조건, q : $C^c \subset B^c \leftrightarrow B \subset C$ $\therefore$ $A \subset B \subset C$

16. 전체집합 U에서 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 한다. $\sim p \rightarrow \sim q$가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$　② $P \cap Q = \phi$　③ $Q \subset P$

④ $P \subset Q$　⑤ $P = Q$

해설

$\sim p \rightarrow \sim q \Rightarrow P^c \subset Q^c \Rightarrow Q \subset P$

17. 두 조건 p, q를 각각 만족하는 집합 P, Q에 대하여

㉠ $(P \cap Q) \cup (P - Q)\} \cap Q = P$
㉡ $(P \cup Q) - Q = \phi$

가

성립할 때, 다음 중 참인 것은?

① $q \rightarrow p$　② $p \rightarrow \sim q$　③ $q \rightarrow \sim p$

④ $\sim p \rightarrow q$　⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

㉠ $P \cap Q = P \therefore P \subset Q$

㉡ $(P \cup Q) - Q = \varnothing \therefore P \subset Q \therefore p \rightarrow q\,(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p\,(T)$

18. 명제 '모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$이다.'를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$이다.

② 어떤 실수 x, y, z에 대하여$xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$이다.

③ 모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$이고 $yz \neq zx$이다.

④ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$이고 $yz \neq zx$이고 $zx \neq xy$이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$이다.

해설

'$xy = yz = zx$'는 '$xy = yz$이고 $yz = zx$이고 $zx = xy$'이므로 '$xy = yz = zx$'의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$이다.

19. 다음 중 명제 「$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$　② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$

③ $x=1,\ y=1$　④ $x=2,\ y=4$

⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

20. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a>0$)
q : $x<-3$ 또는 $x>1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore 2-a < x < 2+a$ $\therefore$
$P=\{x \mid 2-a<x<2+a\}$, $Q=\{x \mid x<-3$ 또는 $x>1\}$
따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3$ ··· ㉠ 또는 $2-a \geq 1$ ··· ㉡,
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$
그런데 $a>0$이므로 구하는 a의 범위는 $0<a \leq 1$

㉠ :

㉡ :

$\therefore \alpha=0,\ \beta=1$
$\therefore \alpha+\beta=1$

21. 다음 명제 중에서 그 역이 참인 것은? (단, 문자는 실수)

① $x=0$ 이면 $xy=0$ 이다.

② $x \geq 1$ 이면 $x^2 \geq 1$ 이다.

③ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x+y \leq 2$ 이다.

④ $a^2+b^2>0$ 이면 $a \neq 0$ 또는$b \neq 0$ 이다.

⑤ $a=b$ 이고 $c=d$ 이면 $a+c=b+d$ 이다.

해설

역인 명제는
① $xy=0$ 이면 $x=0$ (거짓) (반례 : $x=1, y=0$)
② $x^2 \geq 1$ 이면 $x \geq 1$ (거짓) (반례 : $x=-1$)
③ $x+y \leq 2$ 이면 $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ (거짓) (반례 : $x=2,\ y=0$)
④ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2+b^2>0$ (참)
⑤ $a+c=b+d$ 이면 $a=b$ 이고 $c=d$ (거짓) (반례 : $a=-1,\ b=-2,\ c=3,\ d=4$)

22. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2-ax+2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$도 참이다.

$x-2=0 \Rightarrow x^2-ax+2=0 \therefore a=3$

23. 다음은 'a, b, c 가 자연수일 때, $a^2+b^2=c^2$ 이면 a,b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.' 임을 증명한 것이다.

> a,b 가 모두 (가)가 아니라고 가정하면, $a=3m\pm1, b=3n\pm1$ (단, m,n 은 자연수)로 놓을 수 있다. 이 때, $a^2+b^2=3M+$(나) (단, M 은 자연수) $\cdots$ ㉠
> 또, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수)라 하면, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M''+$(다) (단, M', M'' 은 자연수)가 되어 ㉠의 $3M+$(나)의 꼴로는 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a,b 중 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 적으면?

① 자연수, 1, 2　　② 자연수, 2, 1
③ 3 의 배수, 1, 2　　④ 3 의 배수, 2, 1
⑤ 3 의 배수, 2, 2

해설

a,b가 모두 3 의 배수가 아니라고 가정하면
$a=3m\pm1$, $b=3n\pm1$ (단, m,n 은 자연수)로 놓을 수 있다.
이 때, $a^2+b^2=(3m\pm1)^2+(3n\pm1)^2=3\{3(m^2+n^2)\pm2(m+n)\}+2$
$=3M+2$ (단, M은 자연수) $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $c=3l$, $3l\pm1$ (단, l 은 자연수)로 놓을 수 있으므로
$c^2=9l^2$ 또는 $c^2=(3l\pm1)^2=3(3l^2\pm2l)+1$
즉, $c^2=3M'$ 또는 $c^2=3M+1$ (단, M', M 은 자연수)의 꼴이 되어 ㉠의 $3M+2$ 의 꼴로 쓸 수 없다. 따라서, 모순이므로 a,b 중 적어도 하나는 3의 배수이다.

24. 다음 보기의 ☐안에 알맞은 것을 차례로 적으면?

보기

㉠ 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \cup C = B \cup C$ 인 것은 $A = B$ 이기 위한 ☐ 조건이다.

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 은 $x = y = 0$ 이기 위한 ☐ 조건이다.

① 충분, 필요 ② 필요, 충분

③ 필요, 필요 ④ 필요충분, 필요

⑤ 필요충분, 필요충분

해설

㉠ $A \cup C = B \cup C$ $\not\rightleftarrows$ $A = B$ <반례> $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$

$\therefore$ 필요조건

㉡ $x^2 - 2xy + y^2 = 0$, $(x - y)^2 = 0$ 이므로 $x = y$ $\not\rightleftarrows$ $x = y = 0$

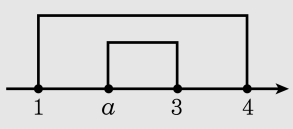
$\therefore$ 필요조건 [반례] $x = 1$, $y = 1$

25. $a \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이고, $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건은 $0 \le x \le b$ 이다. 이때, a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은?

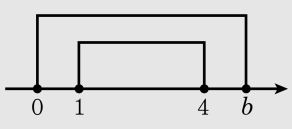
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(i) $0 \le x \le 3$ 은 $1 \le x \le 4$ 이기 위한 충분조건이므로 다음 그림에서 $1 \le a \le 3$
따라서, a 의 최솟값은 1이다.



(ii) $1 \le x \le 4$ 이기 위한 필요조건이 $0 \le x \le b$ 이므로 다음 그림에서 $b \ge 4$



따라서, b 의 최솟값은 4이다.

(i), (ii) 에서 a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은 $1 \times 4 = 4$

26. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$
$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$
$(P \cap U) \cap Q = P$
$P \cap Q = P$
$P \subset Q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

27. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r은 q 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은 ?

① r은 p이기 위한 충분조건

② s는 r이기 위한 필요충분조건

③ r은 q이기 위한 필요충분조건

④ s는 p 이기 위한 필요조건

⑤ s는 q이기 위한 필요충분조건

해설

① $r \rightarrow p$

② $s \leftrightarrow r$, $r \leftrightarrow s$

③ $r \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow r$

④ $s \rightarrow p$

⑤ $s \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow s$

28. 조건 p 는 조건 q 이기 위한 충분조건이고, 조건 p 는 조건 r 이기 위한 필요조건이다. 이 때, [보기]의 명제 중 반드시 참인 명제를 모두 고르면?

보기

ㄱ $p \to r$　　ㄴ $\sim q \to \sim r$

ㄷ $r \to q$　　ㄹ $\sim r \to q$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

$p \to q\ (T) \leftrightarrow \sim q \to \sim p\ (T) \cdots$ ㉠

$r \to p\ (T) \leftrightarrow \sim p \to \sim r\ (T) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\sim q \to \sim r\ (T) \leftrightarrow r \to q\ (T)$

29. $a > b > 0$인 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a}{1+a}$와 $\dfrac{b}{b+1}$의 대소 관계는?

① $\dfrac{a}{1+a} < \dfrac{b}{1+b}$　② $\dfrac{a}{1+a} \le \dfrac{b}{1+b}$

③ $\dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$　④ $\dfrac{a}{1+a} \ge \dfrac{b}{1+b}$

⑤ $\dfrac{a}{1+a} = \dfrac{b}{1+b}$

해설

$$\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$
$$= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$
$(\because a > b > 0)$

$\therefore \dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$

해설

$a > b > 0$이면 $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\dfrac{1+a}{a} < \dfrac{1+b}{b}$

$\therefore \dfrac{a}{1+a} > \dfrac{b}{1+b}$

30. $a > 0$ 일 때, $x = \sqrt{a^2+1}$과 $y = a + \dfrac{1}{2a}$의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $x \le y$ ② $x < y$ ③ $x \ge y$ ④ $x > y$ ⑤ $x = y$

해설

$x^2 = a^2 + 1$

$y^2 = \left(a + \dfrac{1}{2a}\right)^2 = a^2 + 1 + \dfrac{1}{4a^2}$,

$\dfrac{1}{4a^2} > 0$이므로 $y^2 > x^2$

$\therefore y > x$

31. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $|a - b| \geq |a| - |b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$
$\quad -a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a + b + c|)^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
$(|a| + |b| + |c|)^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(|a||b| + |b||c| + |c||a|)$
$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$
$\therefore |a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$

⑤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(|a| - |b|)^2 = a^2 - 2|a||b| + b^2\ (\because |a||b| \geq ab)$
$\therefore |a - b| \geq |a| - |b|$

32. 다음 [보기]중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, a, b, c 는 실수)

보기

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

㉢ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$

㉣ $|a| + |b| > |a + b|$

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉤ ② ㉡, ㉣, ㉠ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤ ⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$

$\Rightarrow$ 양변에 b^2 을 곱하면

$a < c$ ($\because b^2 > 0$)

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림

㉢ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$

㉣ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0$

$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 틀림

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$

$= \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

33. 다음 중 절대부등식 $a^2+ab+b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a=b$　② $ab>0$　③ $a=b=0$

④ $a>b$　⑤ $b>a$

해설

$a^2+b^2+ab=a^2+ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$ ($\because$ $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0$, $\frac{3}{4}b^2$ 0)

$\therefore a^2+b^2 \geq ab$

단, 등호는 $a+\frac{1}{2}b=0$ 이고 $b=0$

즉,$a=0$ 이고 $b=0$일 때, 성립한다.

34. 다음은 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 와 $xy+yz+zx$ 의 대소를 비교한 것이다. [가], [나]에 알맞은 내용을 차례로 나열한 것은?

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \text{ ([가])0 이므로} \\ & x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \text{ (단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)} \end{aligned}$$

① $<$, $x=y=z$ ② $\leq$, $x=y=z$

③ $\geq$, $x=y=z$ ④ $<$, $xy=yz=zx$

⑤ $\leq$, $xy=yz=zx$

해설

$$\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \\ &= \frac{1}{2}\left\{2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \geq 0 \text{ 이므로} \\ & x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \text{ (단, 등호는 } x=y=z \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

35. $3a+4b=1$ 일 때, $\frac{4}{a}+\frac{3}{b}$ 의 최솟값을 구하면?(단, $a>0,\ b>0$)

① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 60

해설

$a>0,\ \ b>0$이므로 산술기하평균의 관계로부터

$3a+4b=1\geq 2\sqrt{12ab}$

$\frac{1}{2}\geq \sqrt{12ab},\ \frac{1}{48}\geq ab$

$\frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{ab}}$

$ab=\frac{1}{48}$ (최대) 일 때 $\sqrt{\frac{12}{ab}}$ 는 최소가 된다.

$\therefore \frac{4}{a}+\frac{3}{b}\geq 2\sqrt{\frac{12}{\frac{1}{48}}}=2\cdot 2\cdot 12=48$

36. 길이가 10인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000원 ② 7000원 ③ 8000원
④ 9000원 ⑤ 10000원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

$$(\text{총 비용}) = 250\left(\frac{10}{n}\right)^2 \times n + 1000(n-1)$$

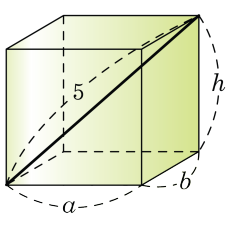
$$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$$

$$= 2 \times 5000 - 1000$$

$$= 10000 - 1000 = 9000$$

37. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$

④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2+b^2+h^2=25$

코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

$(a^2+b^2+h^2)(4^2+4^2+4^2) \geq (4a+4b+4h)^2$

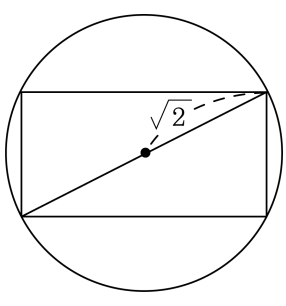
$25 \cdot 48 \geq (4a+4b+4h)^2$

$\Rightarrow \quad 4(a+b+h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a+b+h)$의 최댓값

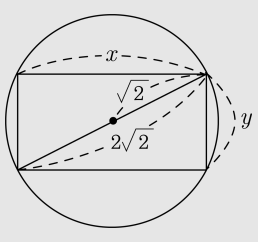
: $20\sqrt{3}$

38. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면

$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times 8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.

39. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$　② $p \Rightarrow \sim r$　③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$　⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$

$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$

$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

40. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 ' (가) 이면 $x^2+y^2 \neq 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \neq 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x > 1$ 이고 $y > 1$, 1 , 참
② $x > 1$ 이고 $y > 1$, 2 , 참
③ $x > 1$ 또는 $y > 1$, 2 , 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

41. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $ab = 0$
㉡ $a^2 + b^2 = 0$
㉢ $a^2 + b^2 > 0$
㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$
㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$
㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

① ㉠과 ㉤ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉢과 ㉦
④ ㉥와 ㉧ ⑤ ㉢과 ㉨

해설

$ab \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$
$a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0$
$a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
$ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

42. 세 조건 p, q, r를 만족하는 진리집합이 각각 $P = \{x \mid x \le -2, 1 \le x \le 5\}$, $Q = \{x \mid x \le a\}$, $R = \{x \mid x \le b\}$이다. p 는 q이기 위한 필요조건이고, r이기 위한 충분조건이 되도록 상수a, b에 대한 a의 최댓값을 M, b 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

p 가q 이기 위한 필요조건, r 이기 위한 충분조건이므로 $Q \subset P \subset R$ 이 성립한다.
따라서 $a \le -2, b \ge 5$ 이므로 a 의 최댓값은 -2, b 의 최솟값은 5
$\therefore -2 + 5 = 3$

43. $a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y,\ z$가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

㉠ $a^2+b^2 \geq ab$

㉡ $a^2+b^2+1 < 2(a+b-1)$

㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \leq (ax+by+cz)^2$

㉣ $|a+b| \leq |a|+|b|$

㉤ $|a|-|b| \geq |a-b|$

㉥ $|a+b| \geq |a|-|b|$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉥

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

㉠ $a^2+b^2-ab = a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$= (a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$

$\therefore\ a^2+b^2 \geq ab$: 맞음

㉡ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$= a^2-2a+b^2-2b+3$

$= (a-1)^2+(b-1)^2+1 > 0$

$\therefore\ a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$: 틀림

㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2$

$+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+$

$2abxy+2bcyz+2cazx)$

$= (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0$

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$: 틀림

㉣ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)

$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$= a^2 2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$= 2|ab|-2ab \geq 0 (\because\ |ab| \geq ab)$

$\therefore\ |a|+|b| \geq |a+b|$: 맞음

㉤ 제곱의 차 비교

$(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$

$= a^2-2|ab|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$= -2|ab|+2ab \leq 0 (\because |ab| \geq ab)$

$\therefore\ |a|-|b| \leq |a-b|$: 틀림

㉥ $|a+b|^2-(|a|-|b|)^2$

$= a^2+2ab+b^2-(a^2-2|ab|+b^2)$

$= 2ab+2|ab| \geq 0$

$\therefore\ |a+b| \geq |a|-|b|$: 맞음

44. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b| \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

② $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b|$

③ $|a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

④ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b|$

⑤ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

해설

$|a|>0,\ |b|>0$이므로

$\dfrac{|a|+|b|}{2} \ge \sqrt{|a||b|} \ge \dfrac{2|a||b|}{|a|+|b|}$

$\therefore\ \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \cdots ㉠$

한편 $(\sqrt{2(a^2+b^2)})^2-(|a|+|b|)^2$

$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \ge 0$

$\therefore (\sqrt{2(a^2+b^2)})^2 \ge (|a|+|b|)^2$

$\therefore |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

45. 양수 a, b에 대하여 다음 식 $a^2 + b + \dfrac{16}{2a+b}$의 최솟값과 그 때의 a, b의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값= 7

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$a^2 + b + \dfrac{16}{2a+b}$

$= -1 + (a^2 - 2a + 1) + 2a + b + \dfrac{16}{2a+b}$

$= -1 + (a-1)^2 + (2a + b + \dfrac{16}{2a+b})$ ··· ①

$2a + b + \dfrac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\dfrac{16}{2a+b})} = 8$에서

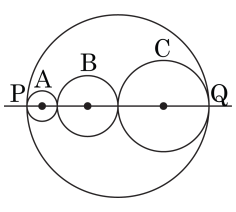
등호는 $2a + b = \dfrac{16}{2a+b}$ 일 때 성립하고

이때, $2a + b = 4$ (a, b는양수) ··· ②

①에서 최소는 $a = 1$ 일 때이다.

∴ ②에서 $a = 1, b = 2$일 때 최솟값 : 7

46. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$ ② $6\sqrt{35}$ ③ $8\sqrt{35}$
④ $10\sqrt{35}$ ⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면
구의 겉넓이는
$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$
$4\pi(x^2+y^2+z^2) = 40\pi$
$\therefore x^2+y^2+z^2 = 10$
$(x^2+y^2+z^2)(2^2+4^2+6^2) \geq (2x+4y+6z)^2$
$10 \cdot 56 \geq (2x+4y+6z)^2$
$4\sqrt{35} \geq 2x+4y+6z$
PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x+4y+6z)$이므로 $8\sqrt{35}$