1. 조화수열 12, 6, 4, 3, $\cdots$ 의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$　　② $\frac{8}{n}$　　③ $\frac{6}{n}$　　④ $\frac{3}{n}$　　⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이다.

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \cdots$

$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \cdots$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$\therefore\ a_n = \frac{12}{n}$

2. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10 인 등차수열의 합 S_{10} 을 구하면?

① 150 ② 170 ③ 190 ④ 210 ⑤ 230

해설

$a=3,\ d=4,\ n=10$ 이므로

$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ 에 대입하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2\cdot 3+(10-1)\cdot 4\}}{2}=210$

3. 첫째항이 1, 공비가 −3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

① 61　② 122　③ 244　④ 361　⑤ 722

해설

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 에서

$S_5 = \dfrac{1 \cdot \{1-(-3)^5\}}{1-(-3)} = 61$

4. 등차수열 $3, 7, 11, 15, \cdots$ 에 대하여 다음의 식이 성립한다.
이때, ㉠+ ㉡+ ㉢의 값을 구하여라.

$$[㉠] = \frac{3 + [㉡]}{2}$$
$$[㉡] = \frac{[㉢] + 15}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$7 = \frac{3+11}{2}$, $11 = \frac{7+15}{2}$ 가 성립하므로
㉠는 7, ㉡는 11, ㉢는 7이다.
$\therefore$ ㉠ + ㉡ + ㉢ $= 7 + 11 + 7 = 25$

5. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 6,\ a_5 = -2$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 284

해설

공차를 d라 하면

$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore\ d = -2$

$\therefore\ a_n = 6 + (n-1)\times(-2) = -2n + 8$

이때, $a_n \geq 0$에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}| = a_1+a_2+a_3+a_4-(a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$

$= 2 \cdot \dfrac{4(6+0)}{2} - \dfrac{20(6-32)}{2} (\because\ a_4 = 0,\ a_{20} = -32)$

$= 24 + 260 = 284$

6. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $\frac{S_{3n}}{S_n}=7$일 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a_1이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n}=\frac{\frac{a_1(r^{3n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=7,\ \frac{r^{3n}-1}{r^n-1}=7$$

$$\frac{(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r^n-1}=7,\ r^{2n}+r^n+1=7$$

$$(r^n)^2+r^n-6=0,\ (r^n+3)(r^n-2)=0$$

$$\therefore\ r^n=2(\because\ r>1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\frac{a_1(r^{2n}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}=\frac{r^{2n}-1}{r^n-1}$$

$$\frac{(r^n-1)(r^n+1)}{r^n-1}=r^n+1=3$$

7. $a_1 = 20,\ a_{n+1} = a_n - 3\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k = -22$를 만족시키는 자연수 k의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 20, 공차가 -3인 등차수열이므로

$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$

즉, $a_k = -3k + 23 = -22$에서 $-3k = -45$

$\therefore k = 15$

8. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$\vdots$

$+\ \underline{a_n = a_{n-1} + (n-1)}$

$a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1)$

$= -1 + \dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$

$\therefore a_{10} = -1 + \dfrac{9 \cdot 10}{2}$

$= -1 + 45 = 44$

9. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

가. $a_1 = 2$ 나. a_{n+1}은 $3a_n$을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a_1 = 2,\ 3a_1 = 6$을 5로 나눈 나머지는 1이므로
$a_2 = 1$ 같은 방법으로 $a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 2$
$a_6 = 1,\ \cdots,\ a_{13} = a_1 = 2,\ a_{40} = a_4 = 4$이므로
$\therefore\ a_{13} + a_{40} = 2 + 4 = 6$

10. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을
수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{(가)}$
$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{(가)}$
$=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$
② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$
③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$
④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$
⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$를 더하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
$=\boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

11. 12와 18로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13500

해설

12와 18로 나누어떨어지는 수는 12와 18의 최소공배수인 36으로 나누어떨어지는 수이므로 $36n$(n은 자연수)의 꼴이다.
이때, $100 \le 36n \le 1000$이므로
$2.\times\times \le n \le 27.\times\times$
$\therefore\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 27$
$n = 3$일 때, $36n = 108$
$n = 27$일 때, $36n = 972$이므로
조건을 만족하는 수열은 첫째항이 108, 끝항이 972, 항수가 $27 - 2 = 25$인 등차수열을 이룬다.
따라서 구하는 총합은
$$\frac{25(108+972)}{2} = 13500$$

12. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫 항부터 제 n항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p+q$의 값은?

① -43　② -33　③ -23　④ -13　⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$에 $n = 1$을 대입하면

$a_1 = p + 1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$b_1 = q + 5$이고

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$에 $n = 1$을 대입하면

$b_1 = 5 + q$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항부터

등차수열을 이룬다.

$\{a_n\}$의 공차는 4,

$\{b_n\}$의 공차는 $2q$이므로 $q = -2$

$a_5 = p + 18,\ b_5 = 5 + 9q$

$p + 18 = 5 + 9q, \quad \therefore\ p = -31$

$\therefore\ p + q = -31 - 2 = -33$

13. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, $a_{200}-a_{100}$의 값은?

$$a_n = 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3, \cdots$$

① $2^{200}-1$ ② $2^{200}-2$ ③ $2^{200}-100$

④ $2^{199}-2^{99}$ ⑤ $2^{200}-2^{100}$

해설

$a_n = 1\cdot 2^{n-1}$

$a_{200} = 2^{199}$

$a_{100} = 2^{99}$

$\therefore a_{200}-a_{100} = 2^{199}-2^{99}$

14. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{n}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{3n}{n+1}$ ④ $\frac{4n}{n+1}$ ⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

15. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1,\ a_2 = 3$이고,
$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?

① 196　② 198　③ 200　④ 202　⑤ 204

해설

$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}$에서
$\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$
$\therefore\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$
따라서, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 첫째항은 1, 공비는 $\frac{3}{1} = 3$이므로
$\therefore\ a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$
$a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k = 3^4 + \frac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$
$= 81 + 121 = 202$

16. x에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값은?

① $\alpha+\beta = \frac{1}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
② $\alpha+\beta = \frac{10}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
③ $\alpha+\beta = \frac{10}{11}$, $\alpha\beta = -\frac{2}{11}$
④ $\alpha+\beta = 11$, $\alpha\beta = -\frac{11}{2}$
⑤ $\alpha+\beta = 11$, $\alpha\beta = -22$

해설

$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2$이고,

$\sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} = x\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= x\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$= x\left(1-\frac{1}{11}\right) = \frac{10}{11}x$

또, $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10\cdot 11}{2} = 55$이므로 주어진 이차방정식은 $10x^2 - \frac{10}{11}x - 55 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$

$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$

17. $\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 625　　② 650　　③ 635　　④ 636　　⑤ 640

해설

$\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]$ 에서 $\left[\sqrt{k}\right]$ 의 값을 알아보면

$k=1$부터 $k=3$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=1$

$k=4$부터 $k=8$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=2$

$k=9$부터 $k=15$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=3$

$k=16$부터 $k=24$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=4$

$k=25$부터 $k=35$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=5$

$k=36$부터 $k=48$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=6$

$k=49$부터 $k=63$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=7$

$k=64$부터 $k=80$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=8$

$k=81$부터 $k=99$까지 $\left[\sqrt{k}\right]=9$

$k=100$에서 $\left[\sqrt{k}\right]=10$

$\sum_{k=1}^{100}\left[\sqrt{k}\right]=1\times3+2\times5+3\times7+4\times9+5\times11+6\times13+$
$7\times15+8\times17+9\times19+10$
$=\sum_{k=1}^{9}k(2k+1)+10$
$=2\cdot\dfrac{9\cdot10\cdot19}{6}+\dfrac{9\cdot10}{2}+10$
$570+45+10=625$

18. 다음을 읽고 (가) 에 들어갈 식으로 알맞은 것을 고르면?

1보다 큰 자연수 p에서 1을 뺀 수를 p_1이라 한다.
p_1이 2보다 크면 p_1에서 2를 뺀 수를 p_2라 한다.
p_2이 3보다 크면 p_2에서 3을 뺀 수를 p_3라 한다.
⋮
p_{k-1}이 k보다 크면 p_{k-1}에서 k를 뺀 수를 p_k라 한다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 수 p_n이 $(n+1)$보다 작으면 이 과정을 멈춘다.
이때, $2p_n$이 $(n+1)$과 같으면 p는 $\boxed{(가)}$이다.

① $n+1$ ② $\dfrac{(n+1)^2}{2}$ ③ $\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
④ 2^{n+1} ⑤ $(n+1)!$

해설

$p_1 = p - 1$
$p_2 = p_1 - 2 = p - (1+2)$
$p_3 = p_2 - 3 = p - (1+2+3)$
⋮
$p_n = p - (1+2+3+\cdots+n)$
$\therefore\ p_n = p - \dfrac{n(n+1)}{2}$
$2p_n = 2p - n(n+1) = n+1$
$\therefore\ p = \dfrac{(n+1)^2}{2}$

19. 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\cdots$

이때, $a_{100}+a_{101}+a_{102}+a_{103}+a_{104}+a_{105}+a_{106}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 99

해설

군으로 나눠보면

$1/\ 2,\ 2/\ 3,\ 3,\ 3/\ 4,\ 4,\ 4,\ 4/\cdots$

100번째항이 k군에 있다하면

$(k-1)$까지 항수의 총합<100

k군의 항수는 k이므로

$(k-1)$군까지 항수의 총합

$=1+2+\cdots+(k-1)$

$\therefore \dfrac{(k-1)k}{2}<100$

$(k-1)k<200$

$k=14$일 때 $13\times14=183$

$k=15$일 때 $14\times15=210$

$\therefore k=14$

따라서 100번째항은 14군에 있다.

13군까지 항수의 총합$=91$이므로

92항　93항　　100항　105항

↓　　↓　　　↓　　　↓

14,　14, $\cdots\cdots$ 14,　$\cdots$ 14

$\therefore a_{100}+a_{101}+\cdots+a_{106}$

$=14\times6+15=99$