

1. 조화수열 12, 6, 4, 3, ...의 일반항은?

① $\frac{12}{n}$

② $\frac{8}{n}$

③ $\frac{6}{n}$

④ $\frac{3}{n}$

⑤ $\frac{2}{n}$

해설

주어진 조화수열을 $\{a_n\}$ 이라고 하면,

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 등차수열이다.

$$\left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots$$

$$= \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \dots$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항은 $\frac{n}{12}$

$$\therefore a_n = \frac{12}{n}$$

2. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10} 을 구하면?

① 150

② 170

③ 190

④ 210

⑤ 230

해설

$a = 3, d = 4, n = 10$ 이므로

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 에 대입하면

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 4\}}{2} = 210$$

3. 첫째항이 1, 공비가 -3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

①

61

② 122

③ 244

④ 361

⑤ 722

해설

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{에서}$$

$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61$$

4. 등차수열 3, 7, 11, 15, ... 에 대하여 다음의 식이 성립한다.
이때, $\textcircled{\text{㉠}}$ + $\textcircled{\text{㉡}}$ + $\textcircled{\text{㉢}}$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned}\textcircled{\text{㉠}} &= \frac{3 + \textcircled{\text{㉡}}}{2} \\ \textcircled{\text{㉡}} &= \frac{\textcircled{\text{㉢}} + 15}{2}\end{aligned}$$

▶ 답:

▷ 정답: 25

해설

$7 = \frac{3 + 11}{2}$, $11 = \frac{7 + 15}{2}$ 가 성립하므로

$\textcircled{\text{㉠}}$ 는 7, $\textcircled{\text{㉡}}$ 는 11, $\textcircled{\text{㉢}}$ 는 7이다.

$$\therefore \textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}} = 7 + 11 + 7 = 25$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 6$, $a_5 = -2$ 일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 284

해설

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 6 + 4d = -2 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore a_n = 6 + (n-1) \times (-2) = -2n + 8$$

이때, $a_n \geq 0$ 에서 $-2n + 8 \geq 0$, 즉 $n \leq 4$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{20}| = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - (a_5 + a_6 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) = 2S_4 - S_{20}$$

$$= 2 \cdot \frac{4(6+0)}{2} - \frac{20(6-32)}{2} (\because a_4 = 0, a_{20} = -32)$$

$$= 24 + 260 = 284$$

6. 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 $\frac{S_{3n}}{S_n} = 7$ 일 때, $\frac{S_{2n}}{S_n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 3

해설

첫째항을 a_1 이라고 하면

$$\frac{S_{3n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{3n} - 1)}{r - 1}}{\frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}} = 7, \quad \frac{r^{3n} - 1}{r^n - 1} = 7$$

$$\frac{(r^n - 1)(r^{2n} + r^n + 1)}{r^n - 1} = 7, \quad r^{2n} + r^n + 1 = 7$$

$$(r^n)^2 + r^n - 6 = 0, \quad (r^n + 3)(r^n - 2) = 0$$

$$\therefore r^n = 2 (\because r > 1)$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{\frac{a_1(r^{2n} - 1)}{r - 1}}{\frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}} = \frac{r^{2n} - 1}{r^n - 1}$$

$$\frac{(r^n - 1)(r^n + 1)}{r^n - 1} = r^n + 1 = 3$$

7. $a_1 = 20$, $a_{n+1} = a_n - 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_k = -22$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 20, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 20 + (n - 1) \times (-3) = -3n + 23$$

$$\text{즉, } a_k = -3k + 23 = -22 \text{에서 } -3k = -45$$

$$\therefore k = 15$$

8. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ + & \left[\begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{10} &= -1 + \frac{9 \cdot 10}{2} \\ &= -1 + 45 = 44 \end{aligned}$$

9. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

가. $a_1 = 2$

나. a_{n+1} 은 $3a_n$ 을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$a_1 = 2$, $3a_1 = 6$ 을 5로 나눈 나머지는 1이므로
 $a_2 = 1$ 같은 방법으로 $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$
 $a_6 = 1$, $\dots$, $a_{13} = a_1 = 2$, $a_{40} = a_4 = 4$ 이므로
 $\therefore a_{13} + a_{40} = 2 + 4 = 6$

10. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을
수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}, (\text{우변}) = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{(\text{가})}$ 를 더하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{(\text{가})}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \boxed{(\text{가})}$$

$$= \boxed{(\text{나})}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$ 를 더하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$$

$$= \boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

11. 12와 18로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13500

해설

12와 18로 나누어떨어지는 수는 12와 18의 최소공배수인 36으로 나누어떨어지는 수이므로 $36n$ (n 은 자연수)의 꼴이다.

이때, $100 \leq 36n \leq 1000$ 이므로

$$2. \times \times \leq n \leq 27. \times \times$$

$$\therefore n = 3, 4, 5, \dots, 27$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } 36n = 108$$

$$n = 27 \text{ 일 때, } 36n = 972 \text{ 이므로}$$

조건을 만족하는 수열은 첫째항이 108, 끝항이 972, 항수가 $27 - 2 = 25$ 인 등차수열을 이룬다.

따라서 구하는 총합은

$$\frac{25(108 + 972)}{2} = 13500$$

12. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫 항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$ 이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p + q$ 의 값은?

① -43

② -33

③ -23

④ -13

⑤ -3

해설

$$a_1 = 2 + p \text{이고}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\} \\ &= 4n + p - 2 \end{aligned}$$

$a_n = 4n + p - 2$ 에 $n = 1$ 을 대입하면

$a_1 = p + 1$ 이므로 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

$$b_1 = q + 5 \text{이고}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} \\ &= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2qn + 5 - q \end{aligned}$$

$b_n = 2qn + 5 - q$ 에 $n = 1$ 을 대입하면

$b_1 = 5 + q$ 이므로 $\{b_n\}$ 은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

$\{a_n\}$ 의 공차는 4,

$\{b_n\}$ 의 공차는 $2q$ 이므로 $q = -2$

$$a_5 = p + 18, \quad b_5 = 5 + 9q$$

$$p + 18 = 5 + 9q, \quad \therefore p = -31$$

$$\therefore p + q = -31 - 2 = -33$$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$ 의 값은?

$$a_n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

① $2^{200} - 1$

② $2^{200} - 2$

③ $2^{200} - 100$

④ $2^{199} - 2^{99}$

⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{200} = 2^{199}$$

$$a_{100} = 2^{99}$$

$$\therefore a_{200} - a_{100} = 2^{199} - 2^{99}$$

14. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{n}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{3n}{n+1}$

④ $\frac{4n}{n+1}$

⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$

15. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1, a_2 = 3$ 이고,

$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 를 만족할 때, $a_5 + \sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값은?

① 196

② 198

③ 200

④ 202

⑤ 204

해설

$$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2} \text{ 에서}$$

$$\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 첫째항은 1, 공비는 $\frac{3}{1} = 3$

이므로

$$\therefore a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$a_5 + \sum_{k=1}^5 a_k = 3^4 + \frac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$$

$$= 81 + 121 = 202$$

16. x 에 대한 이차방정식 $\sum_{k=1}^{10} x^2 - \sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{10} k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값은?

① $\alpha + \beta = \frac{1}{11}, \alpha\beta = -\frac{11}{2}$

② $\alpha + \beta = \frac{10}{11}, \alpha\beta = -\frac{11}{2}$

③ $\alpha + \beta = \frac{10}{11}, \alpha\beta = -\frac{2}{11}$

④ $\alpha + \beta = 11, \alpha\beta = -\frac{11}{2}$

⑤ $\alpha + \beta = 11, \alpha\beta = -22$

해설

$$\sum_{k=1}^{10} x^2 = 10x^2 \text{ 이고,}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{x}{k(k+1)} = x \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= x \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\}$$

$$= x \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{10}{11}x$$

또, $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$ 이므로 주어진 이차방정식은 $10x^2 -$

$$\frac{10}{11}x - 55 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{-\frac{10}{11}}{10} = \frac{1}{11}$$

$$\alpha\beta = \frac{-55}{10} = -\frac{11}{2}$$

17. $\sum_{k=1}^{100} [\sqrt{k}]$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① 625

② 650

③ 635

④ 636

⑤ 640

해설

$\sum_{k=1}^{100} [\sqrt{k}]$ 에서 $[\sqrt{k}]$ 의 값을 알아보면

$$k = 1 \text{ 부터 } k = 3 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 1$$

$$k = 4 \text{ 부터 } k = 8 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 2$$

$$k = 9 \text{ 부터 } k = 15 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 3$$

$$k = 16 \text{ 부터 } k = 24 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 4$$

$$k = 25 \text{ 부터 } k = 35 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 5$$

$$k = 36 \text{ 부터 } k = 48 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 6$$

$$k = 49 \text{ 부터 } k = 63 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 7$$

$$k = 64 \text{ 부터 } k = 80 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 8$$

$$k = 81 \text{ 부터 } k = 99 \text{ 까지 } [\sqrt{k}] = 9$$

$$k = 100 \text{ 에서 } [\sqrt{k}] = 10$$

$$\sum_{k=1}^{100} [\sqrt{k}] = 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + 4 \times 9 + 5 \times 11 + 6 \times 13 + 7 \times 15 + 8 \times 17 + 9 \times 19 + 10$$

$$= \sum_{k=1}^9 k(2k+1) + 10$$

$$= 2 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + \frac{9 \cdot 10}{2} + 10$$

$$570 + 45 + 10 = 625$$

18. 다음을 읽고 (가)에 들어갈 식으로 알맞은 것을 고르면?

1보다 큰 자연수 p 에서 1을 뺀 수를 p_1 이라 한다.

p_1 이 2보다 크면 p_1 에서 2를 뺀 수를 p_2 라 한다.

p_2 이 3보다 크면 p_2 에서 3을 뺀 수를 p_3 라 한다.

$\vdots$

p_{k-1} 이 k 보다 크면 p_{k-1} 에서 k 를 뺀 수를 p_k 라 한다.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 수 p_n 이 $(n+1)$ 보다 작으면 이 과정을 멈춘다.

이때, $2p_n$ 이 $(n+1)$ 과 같으면 p 는 (가)이다.

① $n+1$

② $\frac{(n+1)^2}{2}$

③ $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

④ 2^{n+1}

⑤ $(n+1)!$

해설

$$p_1 = p - 1$$

$$p_2 = p_1 - 2 = p - (1 + 2)$$

$$p_3 = p_2 - 3 = p - (1 + 2 + 3)$$

$\vdots$

$$p_n = p - (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$\therefore p_n = p - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2p_n = 2p - n(n+1) = n+1$$

$$\therefore p = \frac{(n+1)^2}{2}$$

19. 다음과 같은 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...

이때, $a_{100} + a_{101} + a_{102} + a_{103} + a_{104} + a_{105} + a_{106}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 99

해설

군으로 나눠보면

$1/2, 2/3, 3/4, 4/4, 4/5, \dots$

100 번째항이 k 군에 있다하면

$(k-1)$ 까지 항수의 총합 < 100

k 군의 항수는 k 이므로

$(k-1)$ 군까지 항수의 총합

$= 1 + 2 + \dots + (k-1)$

$$\therefore \frac{(k-1)k}{2} < 100$$

$$(k-1)k < 200$$

$$k = 14 \text{ 일 때 } 13 \times 14 = 183$$

$$k = 15 \text{ 일 때 } 14 \times 15 = 210$$

$$\therefore k = 14$$

따라서 100 번째항은 14 군에 있다.

13 군까지 항수의 총합 = 91 이므로

92 항 93 항 100 항 105 항

↓ ↓ ↓ ↓

14, 14, 14, ... 14

$$\therefore a_{100} + a_{101} + \dots + a_{106}$$

$$= 14 \times 6 + 15 = 99$$