1. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$

④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$의 부정은 $1 \leq x \leq 2$이다.

2. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$ $\leftrightarrow$ $xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

3. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.' 의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등하교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

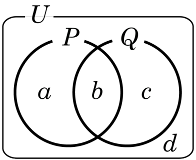
④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

4. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



① a　② b　③ c　④ d　⑤ a와 c

해설

명제 $p \to q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$이면 $x \in Q$ P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \to q$ 는 거짓이다.

5. 명제 「a, b가 모두 정수이면 $a+b$ 와 $a-b$ 도 모두 정수이다.」의 역, 이, 대우 중 참 인 것을 <u>모두</u> 적으면?

① 역　　② 이　　③ 대우

④ 역, 이　　⑤ 역, 이, 대우

해설

주어진 명제 : a, b가 모두 정수이면 $a+b$와 $a-b$도 모두 정수이다.(참)

역 : $a+b$ 와 $a-b$도 모두 정수이면 a, b가 모두 정수이다.(거짓)

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우가 참이 되고, 명제의 역이 거짓이므로 그 대우인 이도 거짓이다.

6. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n=1,2,3$)

p_1 : $x^2-x-2=0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2-x-2=0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

7. 다음 중 명제 'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이가 거짓임을 밝히기 위한 반례로 옳은 것은?

① $x = 0,\ y = 2$

② $x = 1,\ y = 2$

③ $x = 0,\ y = \sqrt{2}$

④ $x = 1,\ y = \sqrt{2}$

⑤ $x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{3}$

해설

'x, y 가 유리수이면 xy 는 유리수이다.' 의 이는 'x또는y 가 유리수가 아니면 xy 는 유리수가 아니다.' 여기에서 가정을 성립시키면서 결론을 성립시키지 않는 것을 찾으면 된다.
즉, ③ $x = 0, y = \sqrt{2}$ 가 반례로 적당하다.

8. 명제 '$|x-3|<a$ 이면 $1<x<7$이다.' 가 참이 되기 위한 양수 a의 최댓값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$-a<x-3<a \Rightarrow 3-a<x<3+a$

$\{x|3-a<x<3+a\} \subset \{x|1<x<7\}$

$\therefore 1 \le 3-a$과 $3+a \le 7$을 동시에 만족해야 한다.

$\therefore a \le 2$

9. 두 조건 $p : |x-2| \le h,\ q : |x+1| \le 7$에 대하여 '$p$이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

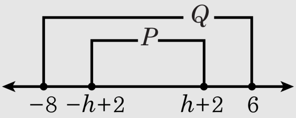
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$p\ :\ 2-h \le x \le 2+h$

$q\ :\ -8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10,\ h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

10. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.

즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로

$4a+2a^2-6=0,\ 2a^2+4a-6=0,$

$a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

11. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.

② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.

③ 4 의 배수는 2 의 배수이다.

④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.

⑤ $x+y \le 5$ 이면 $x \le 2, y \le 3$ 이다.

해설

'역'의 대우인 '이'가 참인지 확인 한다.
① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례 : $x=2$
② x 가 3 의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례 : $x=5$
③ 4 의 배수가 아니면 2 의 배수가 아니다 (거짓) 반례 : 6
④ $2x \le x+3 \rightarrow x \le 3$ (참)
⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \ge 3$ (참)

12. 전체집합 U 의 세 부분집합 P, Q, R 는 각각 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$ ② $Q \subset R$ ③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$ ⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$

또, $\sim p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

$\therefore\ P^c \subset R^c$

따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

13. 두 조건 $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ **답 :** ______조건

▷ **정답 :** 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
$P = \{-1,\ 3\},\ Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

14. 세 조건 $p : 4 \leq x \leq 5$, $q : x \leq a$, $r : x \geq b$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a 의 최솟값을 m 이라 하고, r 이 p 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 b 의 최댓값을 n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$p \Rightarrow q$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 $a \geq 5$

$\therefore m = 5$

$p \Rightarrow r$ 이면 $P \subset R$ 이므로 $b \leq 4$

$\therefore \ n = 4$

$\therefore \ m + n = 9$

15. $x \geq a$가 $x^2 - 4 < 0$의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$가 $-2 < x < 2$의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

16. $0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이고, 필요조건이 $b+3 \le x \le 3$ 이다. a 의 최솟값을 m, b 의 최댓값을 M 이라고 할 때, $m+M$ 의 값을 구하여라.

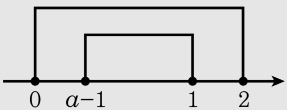
▶ 답 :

▷ 정답 : $m+M=-2$

해설

$0 \le x \le 2$ 이기 위한 충분조건이 $a-1 \le x \le 1$ 이므로

$\{x \mid a-1 \le x \le 1\} \subset \{x \mid 0 \le x \le 2\}$



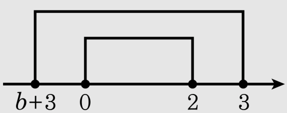
위의 그림에서 $0 \le a-1 \le 1$

$\therefore\ 1 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

또, $0 \le x \le 2$ 이기 위한 필요조건이

$b+3 \le x \le 3$ 이므로

$\{x \mid 0 \le x \le 2\} \subset \{x \mid b+3 \le x \le 3\}$



위의 그림에서 $b+3 \le 0$

$\therefore\ b \le -3 \cdots$ ㉡

㉠에서 a의 최솟값 $m=1$,

㉡에서 b의 최댓값 $M=-3$

$\therefore\ m+M=1+(-3)=-2$

17. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q \therefore\ P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore q$ 는 p 이기 위한 필요조건

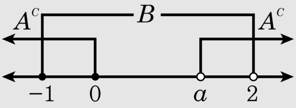
18. 실수 전체의 집합R의 두 부분집합 $A=\{x|0<x\le a\}$, $B=\{x|-1\le x<2\}$가 $A^c\cup B=R$를 만족할 때, a의 값의 범위를 구하면? (단, $A\ne\varnothing$)

① $0\le a<2$ ② $0<a\le 2$ ③ $0\le a\le 2$

④ $0<a<2$ ⑤ $-1\le a<5$

해설

$A\ne\varnothing$이므로, $a>0$ 또 $A^c=\{x|x\le 0$ 또는 $x>a\}$



위의 그림에서 $A^c\cup B=R$가 되려면, $0<a<2$

해설

$A^c\cup B=R\leftrightarrow A\subset B$ 임을 이용하여 구할 수 있다.

19. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 세 조건 p, q, r이 다음과 같다.

> $p : (A-B)\cup(B-A)=\varnothing$
> $q : A=B$
> $r : A\cup B=B$

이 때, 조건 p는 조건 q이기 위한 ㉠조건이고, 조건 q는 조건 r 이기 위한 ㉡조건이다. ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 필요, 충분
② 필요충분, 필요
③ 필요, 필요
④ 필요충분, 충분
⑤ 충분, 필요

해설

$(A-B)\cup(B-A)\ \varnothing \leftrightarrow A-B=\varnothing, B-A=\varnothing \leftrightarrow A\subset B,\ \ B\subset A$
$\leftrightarrow A=B \therefore p \leftrightarrow q$ 이므로
㉠: 필요충분조건
$A\cup B\ B \leftrightarrow A\subset B$ 이고 $A=B \Rightarrow A\subset B$ (역은 성립하지 않는다.)
$\therefore q \Rightarrow r$ 이므로 ㉡: 충분조건

20. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하자. $\sim q$가 p이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$　　② $Q \subset P$　　③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$　　⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$이므로 진리집합으로 표현하면,$P \subset Q^c$ 이다.

즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$