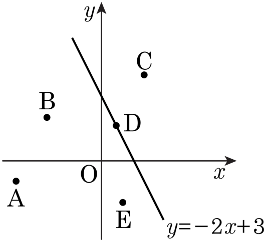
1. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 직선 $y = -2x + 3$ 과 다섯 개의 점 A, B, C, D, E 가 있다. 이 중에서 부등식 $y \le -2x + 3$ 을 만족하는 영역에 속하는 점의 개수는?



① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

부등식 $y \le -2x + 3$ 을 만족하는 영역은
직선 $y = -2x + 3$ 의 경계를 포함한 아래쪽 부분이다.
경계에 있는 점이 D 이고,
아래쪽에 있는 점이 A, B, E 이므로,
부등식을 만족하는 영역에 속하는 점의 개수는 4개이다.

2. 다음 보기 중 부등식 $(x+y)(x^2+y^2-4) \le 0$ 이 나타내는 영역에 속하지 <u>않는</u> 점의 개수는?

㉠ $(-3,\ 3)$	㉡ $(-2, -2)$	㉢ $(1,\ 1)$
㉣ $(\sqrt{3},\ 1)$	㉤ $(3, -2)$	

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

각 점을 부등식에 대입해서 부등식이 성립하지 않는 점의 개수를 찾으면 된다.

㉠ $(-3,\ 3)$ 을 $(x+y)(x^2+y^2-4) \le 0$ 에 대입하면, $(-3+3)\left\{(-3)^2+3^2-4\right\} = 0 \le 0$

부등식이 성립하므로 점 $(-3, 3)$ 은

주어진 부등식이 나타내는 영역에 속한다.

㉡ $\left\{-2+(-2)\right\}\left\{(-2)^2+(-2)^2-4\right\} = -16 \le 0$

따라서 나타내는 그 영역에 속한다.

㉢ $(1+1)\left(1^2+1^2-4\right) = -4 \le 0$

따라서 점 $(1, 1)$ 은

주어진 부등식이 나타내는 영역에 속한다.

㉣ $(\sqrt{3}+1)\left\{(\sqrt{3})^2+1^2-4\right\} = 0 \le 0$

따라서 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 은

주어진 부등식이 나타내는 영역에 속한다.

㉤ $\left\{3+(-2)\right\}\left\{3^2+(-2)^2-4\right\} = 9 > 0$

따라서 점 $(3, -2)$ 는

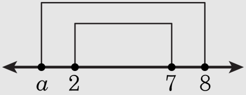
부등식이 성립하지 않으므로 속하지 않는다.

3. $2 \le x \le 7$을 만족하는 모든 $(x,\ y)$가 $a \le x \le 8$를 만족한다고 할 때, 상수 a 의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

다음 그림과 같아야 한다.



$\therefore\ a \le 2$

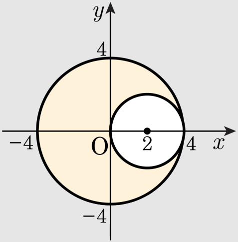
그러므로 a 의 최댓값은 2 이다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 16 \\ (x-2)^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 넓이는?

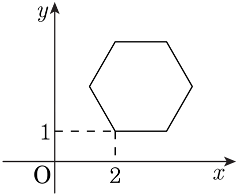
① 9π ② 10π ③ 12π ④ 14π ⑤ 20π

해설

$x^2+y^2 \le 16$ 은 중심이 원점이고
반지름이 4인 원의 내부이고,
$(x-2)^2+y^2 \ge 4$ 는 중심이 $(2,\ 0)$ 이고
반지름이 2인 원의 외부이다.
동시에 만족하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다. 따라서 구하는 영역의 넓이는
$\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 2^2 = 12\pi$



5. 다음은 한 변의 길이가 2 인 정육각형을 직교좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 여섯 개의 꼭짓점 중 부등식 $x+5y \geq 10$ 의 영역 안에 있는 점의 개수를 구하여라. (정육각형의 가장 아래 변은 x 축에 평행하고, $\sqrt{3}=1.7$ 로 한다)



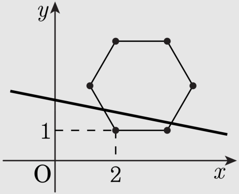
▶ **답 :** ____개

▷ **정답 :** 4 개

해설

직선 $x+5y=10$ 은 x 절편이 10, y 절편이 2 이므로 아래 그림과 같이 그릴 수 있다.

따라서 직선의 윗부분에 해당하는 꼭짓점의 개수는 4 (개) 이다.



6. 부등식 $x^2+y^2-2x+4y<0$이 속하지 않는 사분면을 구하면?

① 1사분면　　② 2사분면　　③ 3사분면

④ 4사분면　　⑤ 없다

해설

$x^2+y^2-2x+4y<0$ 은 중심이 $(1,-2)$이고 반지름이 $\sqrt{5}$ 인 원의 내부이므로 $1, 3, 4$사분면을 지난다.

따라서 지나지 않는 사분면은 2사분면이다.

7. 점 $(k,\ -2)$ 이 부등식 $x^2+y^2 \le 9$ 의 영역 안에 있을때 k 의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ 5 ⑤ 6

해설

점 $(k,\ -2)$ 가
부등식 $x^2+y^2 \le 9$ 을 만족하여야 하므로,
$k^2+(-2)^2 \le 9,\ k^2 \le 5$
$\therefore\ -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $2\sqrt{5}$ 이다.

8. 부등식 $y \le -x^2+4$를 만족시키는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿개

▷ 정답 : 3개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y=-x^2+4$의 경계를 포함한 아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 중 x, y가 모두 양의 정수인 것은

(ⅰ) $x=1$일 때

$y \le -1^2+4=3$이므로 $y=1, 2, 3$

(ⅱ) $x=2$일 때

$y \le -2^2+4=0$

즉, 양의 정수 y는 존재하지 않는다.

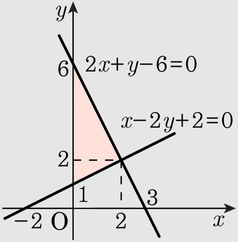
따라서 x, y가 모두 양의 정수인 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$의 3개이다.

9. 세 부등식 $x \geq 0, x-2y+2 \leq 0, 2x+y-6 \leq 0$을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

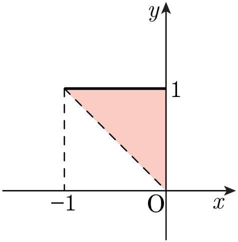
해설

주어진 세 부등식을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분이다.
이 때, 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$의 교점은
점 $(2,\ 2)$이므로 어두운 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$



(단, 경계선 포함)

10. x, y 의 영역이 다음 그림과 같이 주어졌을 때, x^2+y^2 의 값의 최댓값은?



① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$

④ 2　　⑤ 3

해설

$x^2+y^2=k$ 라 하면,

k 값은 점 $(0,\ 0)$ 을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 제곱한 것이므로

점 $(-1,\ 1)$ 을 지날 때, k 값이 최대이다.

따라서 k 의 값의 최대값은 $(-1)^2+1^2=2$

11. 두 부등식 $|x-1| \le 2$, $|y-2| \le 3$ 을 동시에 만족하는 실수 x , y 에 대하여 x^2+y^2 의 최댓값은?

① 24 ② 25 ③ 29 ④ 32 ⑤ 34

해설

$-2 \le x-1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3$

$-3 \le y-2 \le 3 \Rightarrow -1 \le y \le 5$

$\therefore$ x^2+y^2 의 최댓값은 $x=3, y=5$ 일 때 이다.

$x^2+y^2=34$

12. 부등식 $y \geq (x-2)^2 + k$의 영역이 부등식 $y \geq -x + 4$의 영역에 포함되도록 하는 k의 최솟값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ $\frac{7}{4}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

포물선과 직선이 접하거나 만나지 않을 때이다.

$-x + 4 = (x-2)^2 + k, \quad \therefore \; x^2 - 3x + k = 0$

$D = 9 - 4k \leq 0 \quad \therefore \; k \geq \frac{9}{4}$

13. 부등식 $y^2 \le x^2 \le 4-y^2$ 을 만족하는 영역의 넓이는?

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π ④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ 2π

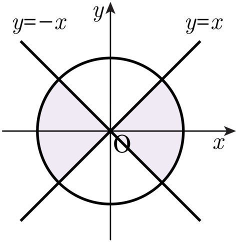
해설

$y^2 \le x^2 \le 4-y^2$

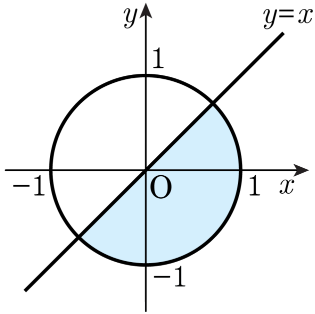
$$\begin{cases} y^2 \le x^2 & \cdots ① \\ x^2 \le 4-y^2 & \cdots ② \end{cases}$$

①, ②의 연립부등식의 영역을 그려보면, 다음 그림과 같고 $y=x$ 기울기의 각이 45^o 이므로 영역의 넓이는

$\therefore\ 2\times\pi\times 2^2\times\frac{90}{360}=2\pi$



14. 다음 중 그림의 빗금친 부분을 나타내는 부등식은? (단, 경계선 포함)



① $\begin{cases} y \geq x \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} y \leq x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} y \geq x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

④ $(x-y)(x^2+y^2-1) \leq 0$

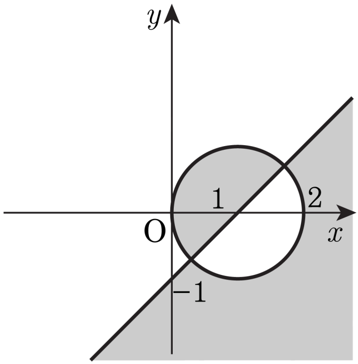
⑤ $(x-y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

해설

$x^2 + y^2 = 1$의 내부와 $y = x$의 아랫부분이므로

$\begin{cases} y \leq x \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

15. 다음 색칠한 부분의 영역을 부등식으로 바르게 나타낸 것은? (단, 경계선 포함)



① $(x^2+y^2-2y)(x-y-1)\le 0$

② $(x^2+y^2-2y)(x-y-1)\ge 0$

③ $(x^2+y^2-2x)(x-y-1)\le 0$

④ $(x^2+y^2-2x)(x-y-1)\ge 0$

⑤ $(x^2+y^2)(x-y-1)\ge 0$

해설

$x^2+y^2-2x=0, x-y-1=0$가 주어진 영역의 경계를 나타내고, 주어진 영역속의 점 $(3,0)$을 $(x^2+y^2-2x)(x-y-1)$에 대입하면 0보다 크므로 구하고자 하는 식은$(x^2+y^2-2x)(x-y-1)\ge 0$이다.

16. 좌표평면위의 동점 $\mathrm{P}(x, y)$가 세 개의 부등식 $1 \le x \le 3$, $1 \le y \le 3$, $x+y \le 4$를 만족시킬 때 $\dfrac{y+2}{x+1}$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\dfrac{7}{4}$ ② $\dfrac{9}{4}$ ③ $\dfrac{11}{4}$ ④ $\dfrac{13}{4}$ ⑤ 3

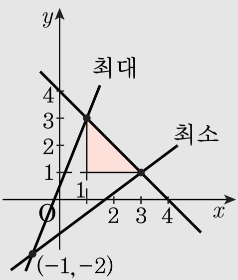
해설

$\dfrac{y+2}{x+1} = k$라 하면 $y+2 = k(x+1)$

이것은 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 직선이고

k는 $(1,\ 3)$을 지날 때 최대이고 $(3,\ 1)$을 지날 때 최소이므로

다음 그림과 같다.



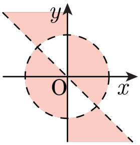
구하는 범위는 $\dfrac{3}{4} \le k \le \dfrac{5}{2}$

따라서, 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$, 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$

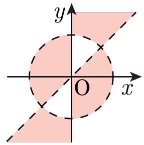
$\therefore \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{13}{4}$

17. 부등식 $x(x+y)(x^2+y^2-4)>0$ 를 만족하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면? (단, 경계선 제외)

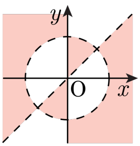
①



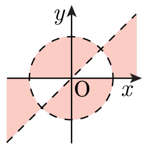
②



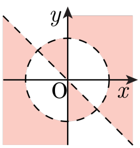
③



④



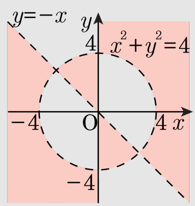
⑤



해설

$x=0,\ x+y=0,\ x^2+y^2=4$ 의 그래프를 모두 그리고 각각의 영역의 경계선 위에 있지 않은 한 점 $(5,\ 0)$ 을 부등식에 대입하면 $5\cdot(5+0)\cdot(5^2+0^2+4)>0$ 으로 부등식을 만족한다.

따라서 그림과 같이 점 $(5,\ 0)$ 을 포함하는 영역과 이 영역과 인접하지 않은 영역이 부등식을 만족한다.

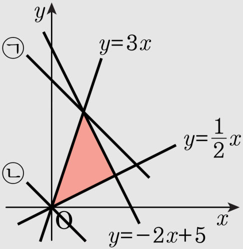


18. x, y 가 세 부등식 $2y \geq x, y \leq 3x, 2x+y \leq 5$ 를 동시에 만족할 때, $x+y$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x+y=k$ 라 하면,
$y=-x+k$ 이므로
y 절편의 최대, 최소를 찾는다.
빗금 친 영역을 지나야 하므로,
㉠일 때가 최대, ㉡일 때가 최소이다
㉠ : $y=3x$ 와 $y=-2x+5$ 의 교점
$(1,3)$을 지나므로 $k=4$
㉡ : $(0,\ 0)$ 을 지나므로 $k=0$
$\therefore$ 최댓값과 최솟값의 합은 $0+4=4$



19. 점 $(x,\ y)$ 가 원 $(x-3)^2+(y-1)^2=8$ 의 둘레를 움직일 때, $\dfrac{y-1}{x}$ 의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{2}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ 3

해설

구하고자 하는 값을 $\dfrac{y-1}{x}=k$ 라 놓으면,

$y=kx+1$,

원의 중심 $(3,\ 1)$ 에서 직선 $kx-y+1=0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면,

$$d=\frac{|3k-1+1|}{\sqrt{k^2+1^2}}\le 2\sqrt{2}$$

$|3k|\le 2\sqrt{2}\sqrt{k^2+1},\ 9k^2\le 8k^2+8$

$\therefore\ -2\sqrt{2}\le k\le 2\sqrt{2}$

20. 아래 표는 식품A 1 kg 과 식품B 1 kg 에 들어 있는 단백질과 철분의 양을 나타낸 것이다.

	단백질(g)	철분(mg)
식품A	300	12
식품B	200	36

어떤 사람이 하루에 섭취해야 하는 영양소 중 단백질과 철분의 양은 각각 100 g, 12 mg 이라 한다. 식품 A 는 1 kg 에 2000 원, 식품 B 는 1 kg 에 2500 원일 때, 이 사람이 식품 A 와 식품 B 만으로 하루에 필요한 단백질과 철분을 섭취하는데 드는 최소비용은?

① 1000 원 ② 1200 원 ③ 1250 원

④ 1500 원 ⑤ 2000 원

해설

식품 A 의 양을 x kg, 식품 B 의 양을 y kg라 하면 단백질과 철분의 양은 각각 $300x+200y$, $12x+36y$ 이다.
따라서 주어진 조건에 의해 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 이고,

$$\begin{cases} 300x+200y \geq 100 \\ 12x+36y \geq 12 \end{cases}$$

$2000x+2500y=k$ 라 놓으면
다음그림에서 두 직선의 교점을 지날 때,
최소가 된다.
교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{7},\ \frac{2}{7}\right)$ 이므로 최소비용은 1000 원이다.