

1. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

2. 두 점 A(-2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, △ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

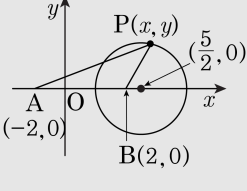
$$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$
$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$
$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$
$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$
$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

3. 두 정점 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x, y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$$
$$2\{(x + \sqrt{2})^2 + y^2\} - \{(x - \sqrt{2})^2 + y^2\} = 9$$

이것을 정리하면, $(x + 3\sqrt{2})^2 + y^2 = 25$
점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2}, 0)$ 을 중심으로 하고,
반지름이 5 인 원이다.

4. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 밖의 한 점 $P(3, 1)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x - 3y = 4$
- ② $3x - y = 4$
- ③ $x + 3y = 4$
- ④ $3x + y = 4$
- ⑤ $3x + 2y = 4$

해설

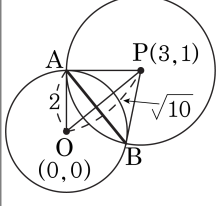
$\overline{AB}$ 는 주어진 원과 중심 P, 반지름 $\overline{PA}$ 인 원과의 공통현이다.

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \overline{PA}^2 = 6$

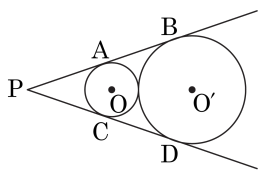
따라서 직선 AB 의 방정식은

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 - x^2 - y^2 = 6 - 4$

이것을 정리하면, $3x + y = 4$



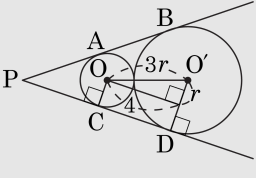
5. 다음 그림과 같이 외접하는 두 원 O, O'의 공통외접선의 교점을 P, 접점을 A, B, C, D라고 하자. $\overline{PA} = \overline{AB} = 4\text{ cm}$ 일 때, 원 O의 넓이를 구하면?



- ① $\pi\text{ cm}^2$ ② $2\pi\text{ cm}^2$ ③ $3\pi\text{ cm}^2$
 ④ $4\pi\text{ cm}^2$ ⑤ $5\pi\text{ cm}^2$

해설

$\triangle POA$ 와 $\triangle PO'B$ 는 닮음이고 닮음비는 1 : 2이다.
 $\therefore \overline{OA} = r$ 이라 하면, $\overline{O'B} = 2r$
 다음 그림에서 $4^2 + r^2 = 9r^2$
 $\Rightarrow r = \sqrt{2}$
 $\therefore$ 원 O의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$



6. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d 가 2 이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26

7. 다음 중 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에 접하고 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $x + \sqrt{3}y = 1$ ② $\sqrt{3}x + y = 1$ ③ $x - \sqrt{3}y = -1$

④ $\sqrt{3}x - y = -3$ ⑤ $x + y = 2$

해설

원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하기 위해서는 중심 $(1,0)$ 을 지나야 한다.
곧, $(1,0)$ 을 지나는 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 의 접선을 구하면 된다.
기울기를 m 이라 두면, 구하는 직선은

$$y = m(x-1), mx - y - m = 0$$

중심 $(-1,0)$ 에서 이 직선에 이르는 거리가 반지름 1과 같으면 된다.

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

$$\therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

대입하여 정리하면,

$$x + \sqrt{3}y = 1 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 1$$

8. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

9. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y = ax + b$ 까지의
거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 1 \iff b^2 = a^2 + 1 \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2 \iff (b-2)^2 = 4(a^2 + 1) \dots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면

$$b = -2, \quad a^2 = 3$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 7$$

해설

중심 $C_1(0, 0)$ 과 직선 $ax - y + b = 0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|a \cdot 0 - 1 \cdot 0 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, \quad |b| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\therefore b^2 = a^2 + 1 \dots \textcircled{1}$$

중심 $C_2(0, 2)$ 와 직선 $ax - y + b = 0$

사이의 거리는

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2, \quad |b-2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$b^2 - 4b = 4a^2 \dots \textcircled{2}$$

① $\times 4 - \textcircled{2}$ 에서

$$3b^2 + 4b - 4 = 0, \quad (3b-2)(b+2) = 0$$

$$\therefore b = \frac{2}{3}, \quad -2$$

이 때 $b^2 = a^2 + 1 \geq 1$ 에서 $b = -2$

이것을 ② 에 대입하면 $a^2 = 3$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3 + 4 = 7$$

10. 원 $x^2 + (y - 1)^2 = 2$ 의 x 축의 위에 있는 부분과 그 부분을 x 축에 대하여 대칭 이동하여 생기는 도형으로 둘러싸인 부분의 넓이는?
- ① $\pi + 1$ ② $\pi + 2$ ③ $3\pi + 1$
④ $3\pi + 2$ ⑤ $3\pi + 4$

해설

(구하는 넓이)

$$= \left\{ \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right\} \times 2$$
$$= 3\pi + 2$$