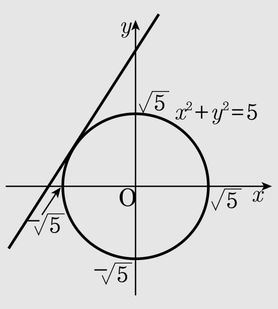
1. 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선 l_1 과 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선 l_2 가 모두 원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$　　② $-\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설



직선 $y=2x+8$ 을 평행이동하면
원 $x^2+y^2=5$ 와 접하므로 접선의
기울기는 2 이다.
원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은
$y=2x+\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+2^2}$
즉, $y=2x+5$ 이고,
이것이 두 직선 l_1, l_2 와 일치한다.
이때, 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로
m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y=2(x-m)+8$ 　　$\therefore l_1 : y=2x-2m+8$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$-2m+8=5$ 　　$\therefore m=\frac{3}{2}$
또한, 직선 $y=2x+8$ 을 y 축의 방향으로 n 만큼
평행이동한 직선의 방정식은
$y-n=2x+8$ 　　$\therefore l_2 : y=2x+8+n$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$8+n=5$ 　　$\therefore n=-3$
$\therefore m+n=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

2. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$ 와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x : y) \quad \rightarrow \quad (x+2,\ y+1)$

$y = 2x + a \xrightarrow{f} (y-1) = 2 \cdot (x-2) + a$

$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$

직선 $2x - y + (a-3) = 0$ 과 $(0,\ 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$\dfrac{|a-3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5},\ |a-3| = 5$

$a - 3 = \pm 5,\ a = 3 \pm 5$

$\therefore\ a = 8 \ \ (\because\ a > 0)$

3. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 36$의 넓이를 이등분하는 직선 $y = mx + n$을 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 49$의 넓이를 이등분하였다. 실수 m, n에 대하여 $m + n$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
$y = mx + n$ 은 점 $(0, 1)$ 을 지난다.
$1 = n \cdots$ ㉠
직선 $y = mx + n$를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y - 2 = m(x-1) + n$이 직선이
점 $(4, -3)$을 지나므로
$-5 = 3m + n \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m = -2, n = 1$
$\therefore m + n = -2 + 1 = -1$

4. 두 점 A$(a,\ b)$, B$(c,\ d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$ ② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$ ④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$\Rightarrow \dfrac{d-b}{c-a} \times m = -1$

$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots$ ①

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$\Rightarrow \dfrac{b+d}{2} = m\left(\dfrac{a+c}{2}\right)$

$\Rightarrow b + d = \ m(a+c) \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$a - c = \dfrac{b+d}{a+c}(d-a)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

5. 두 변환 f, g가 다음과 같이 주어졌을 때, $(g \circ f)(-2,\ 3)$을 구하면?

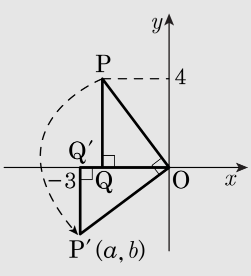
$f : (x, y) \to (x-1, y+1)$ $g : (x, y)$를 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 90 °회전시킨다.

① $(4,\ 3)$　　② $(3, -4)$　　③ $(-4, -3)$

④ $(-4, -1)$　　⑤ $(4, -3)$

해설

합성변환의 정의에 의해 $(g \circ f)(-2,\ 3)$을 풀면
$(g \circ f)(-2,\ 3) = g(f(-2,\ 3)) = g(-3, 4)$
주어진 정의에 의해 $g(-3,\ 4)$ 는 점 $(-3, 4)$를 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 회전시킨 것이므로
그림에서와 같이 $\mathrm{P}(-3, 4)$에 대해 회전이동된 점 $\mathrm{P}'(a, b)$를 정하면



$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OP'}}$ (회전축) …… ①
$\angle \mathrm{POQ} = \angle \mathrm{OP'Q'}$ …… ②
$\angle \mathrm{OQP} = \angle \mathrm{OQ'P'}$ …… ③
①, ②, ③에 의해 $\angle \mathrm{OPQ} \equiv \angle \mathrm{P'OQ'}$
따라서, 대응변으로 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{P'Q'}}$ 이고 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OQ'}}$ 다.
이를 제사분면의 좌표로 나타내면 $\mathrm{P}(-4, -3)$

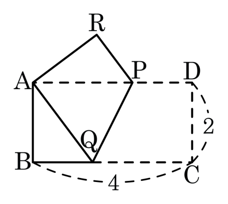
6. 직선 $y = kx+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2+6x-4y+9 = 0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y = kx + 1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은
$y = -kx - 1 \cdots$ ㉠
이제 원의 방정식을 정리하면,
$(x+3) + (y-2)^2 = 4$
직선이 원의 넓이를
이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
중심이 $(-3, 2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,
$2 = 3k - 1 \Rightarrow \quad k = 1$

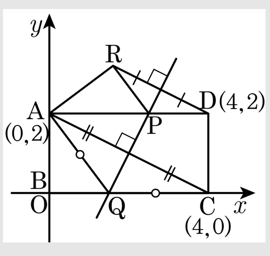
7. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 4, 2 인 직사각형 모양의 종이 ABCD 를 접어서 대각선의 양 끝점 A 와 C 가 겹쳐지도록 하였다. 이 때, 선분 BR 의 길이를 구하면?



① $8\sqrt{5}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{8\sqrt{5}}{7}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{9}$

해설

다음 그림과 같이 점 B 가 원점이 되도록 사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 나타내면



A $(0,2)$, B $(0,0)$, C $(4,0)$, D $(4,2)$
이 때, 두 점 A, C 와 두 점 D, R 는
각각 직선 PQ 에 대하여 대칭이다.
따라서 직선 PQ 는 직선 AC 와 수직이고,
직선 AC 의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로
직선 PQ 의 기울기는 2 이다.
또한, 직선 PQ 는 선분 AC 의 중점 $(2,1)$ 을 지난다.
따라서, 직선 PQ 의 방정식은 $y-1=2(x-2)$,
즉 $y=2x-3$
결국 점 D $(4,2)$ 를 직선 $y=2x-3$ 에 대하여
대칭이동한 점이 R 이다.
이 때, R (a,b) 라고 하면
직선 DR과 직선 $y=2x-3$ 이 수직이므로
$\frac{b-2}{a-4}\cdot 2=-1$
$\therefore a+2b=8 \cdots\cdots$ ㉠
또한, 선분 DR 의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 는
직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로
$\frac{b+2}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-3$
$\therefore 2a-b=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=\frac{8}{5}, b=\frac{16}{5}$
$\therefore$ R $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$
$\therefore \overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{256}{25}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

8. 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2-c=0$ 이 된다고 한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -18 ② -16 ③ 0 ④ 22 ⑤ 23

해설

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

즉, $(2,4)$ 를 $y=ax+b$ 에 대칭이동하면 $(0,0)$

1) $(2,4)$ 와 $(0,0)$ 의 중점은 $y=ax+b$ 를 지난다. $\Rightarrow 2=a+b$

2) $(2,4),(0,0)$ 을 잇는 선분은 $y=ax+b$ 에 수직이다.

$\Rightarrow 2=-\frac{1}{a}, a=-\frac{1}{2}$

1), 2) 에 의해 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=20,$

$a+b+c=22$

9. 직선 $y=0$ 을 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭이동시킨 직선과 $x-y+2=0$ 과의 교점을 P 라 할 때 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

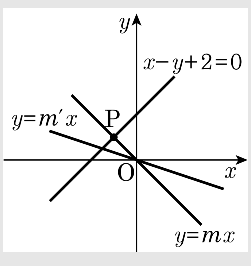
① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{3}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ $\sqrt{6}$

해설

직선 $y=0$ 을 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭 이동시킨 직선을 $y=m'x$ 이라 할 때

$y=m'x$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점을 P 라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은 원점에서 직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리와 같다.

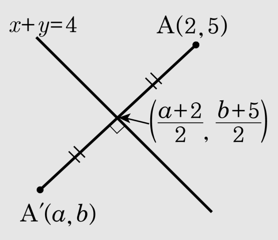


따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은 $\dfrac{|2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ 이다.

10. 두 점 $\mathrm{A}(2,5)$, $\mathrm{B}(7,0)$ 과 직선 $x+y=4$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값과 이때의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $\sqrt{17}$, $\mathrm{P}(2,-1)$ ② $2\sqrt{17}$, $\mathrm{P}(3,1)$ ③ $3\sqrt{17}$, $\mathrm{P}(5,2)$
④ $4\sqrt{17}$, $\mathrm{P}(4,8)$ ⑤ $5\sqrt{17}$, $\mathrm{P}(1,2)$

해설



점 $\mathrm{A}(2,5)$ 를 직선 $x+y=4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(a,b)$ 로 놓으면

선분 AA' 의 중점$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$ 는

직선 $x+y=4$ 위에 있으므로

$\frac{a+2}{2}+\frac{b+5}{2}=4$

$\therefore a+b=1 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 직선 AA' 은 $x+y=4$ 와 수직이므로

$\frac{b-5}{a-2}\cdot(-1)=-1$

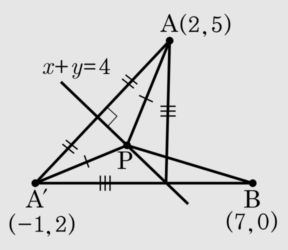
$\therefore a-b=-3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, b=2$

$\therefore \mathrm{A}'(-1,2)$

이때, 다음 그림에서



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} &= \overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\\ &\geq \overline{\mathrm{A'B}}\\ &= \sqrt{(7+1)^2+(0-2)^2}\\ &= \sqrt{68}=2\sqrt{17}\end{aligned}$$

따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{17}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=2\sqrt{17}$ 일 때의

점 P 는 직선 $\mathrm{A'B}$ 와 직선 $x+y=4$ 의 교점이다.

두 점 $\mathrm{A}'(-1,2)$, $\mathrm{B}(7,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$y-0=\frac{0-2}{7-(-1)}(x-7)$,

$y=-\frac{1}{4}(x-7)$

$\therefore x+4y-7=0$

두 방정식 $x+4y-7=0$, $x+y-4=0$ 을 연립하여 풀면

$x=3, y=1$

$\therefore \mathrm{P}(3,1)$

따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소일 때의 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(3,1)$