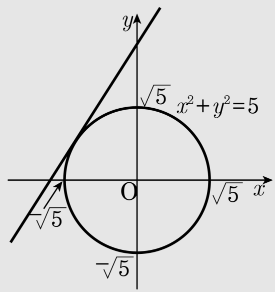
1. 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선 l_1 과 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선 l_2 가 모두 원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설



직선 $y=2x+8$ 을 평행이동하면 원 $x^2+y^2=5$ 와 접하므로 접선의 기울기는 2 이다.

원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은

$y=2x+\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+2^2}$

즉, $y=2x+5$ 이고,

이것이 두 직선 l_1, l_2 와 일치한다.

이때, 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=2(x-m)+8 \qquad \therefore l_1 : y=2x-2m+8$

이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로

$-2m+8=5 \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$

또한, 직선 $y=2x+8$ 을 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-n=2x+8 \qquad \therefore l_2 : y=2x+8+n$

이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로

$8+n=5 \qquad \therefore n=-3$

$\therefore m+n=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

2. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 5　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(x : y) \quad \to \quad (x+2,\ y+1)$

$y = 2x + a \ \xrightarrow{f} (y-1) = 2 \cdot (x-2) + a$

$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$

직선 $2x - y + (a-3) = 0$ 과 $(0,\ 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|a-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5},\ |a-3| = 5$

$a - 3 = \pm 5,\ a = 3 \pm 5$

$\therefore\ a = 8 \ \ (\because\ a > 0)$

3. 원 $x^2+(y-1)^2=36$의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2+(y+3)^2=49$의 넓이를 이등분하였다. 실수 m, n에 대하여 $m+n$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
$y=mx+n$ 은 점 $(0,1)$ 을 지난다.
$1=n \cdots$ ㉠
직선 $y=mx+n$를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y-2=m(x-1)+n$이 직선이
점 $(4,-3)$을 지나므로
$-5=3m+n \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-2, n=1$
$\therefore m+n=-2+1=-1$

4. 두 점 $A(a,\ b)$, $B(c,\ d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$ ② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$ ④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{AB}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots ①$$

그리고 $\overline{AB}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m\left(\frac{a+c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow b + d = \quad m(a+c) \cdots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$a - c = \frac{b+d}{a+c}(d-a)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

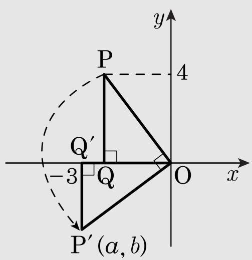
5. 두 변환 f, g가 다음과 같이 주어졌을 때, $(g\circ f)(-2,\ 3)$을 구하면?

$f:(x,y)\rightarrow(x-1,y+1)$
$g:(x,y)$를 원점을 중심으로 하여
반시계방향으로 90 °회전시킨다.

① $(4,\ 3)$　② $(3,-4)$　③ $(-4,-3)$
④ $(-4,-1)$　⑤ $(4,-3)$

해설

합성변환의 정의에 의해 $(g\circ f)(-2,\ 3)$을 풀면
$(g\circ f)(-2,\ 3)=g(f(-2,\ 3))=g(-3,4)$
주어진 정의에 의해 $g(-3,\ 4)$ 는 점
$(-3,4)$를 원점을 중심으로 하여 반시
계방향으로 회전시킨 것이므로
그림에서와 같이 $\mathrm{P}(-3,4)$에 대해 회전
이동된 점 $\mathrm{P}'(a,b)$를 정하면



$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP'}}$ (회전축) ······· ①
$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{OP'Q'}$ ······· ②
$\angle\mathrm{OQP}=\angle\mathrm{OQ'P'}$ ······· ③
①, ②, ③에 의해 $\angle\mathrm{OPQ}\equiv\angle\mathrm{P'OQ'}$
따라서, 대응변으로 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{P'Q'}}$ 이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ'}}$ 다.
이를 제사분면의 좌표로 나타내면 $\mathrm{P}(-4,-3)$

6. 직선 $y=kx+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y=kx+1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은

$y=-kx-1\cdots$ ㉠

이제 원의 방정식을 정리하면,

$(x+3)+(y-2)^2=4$

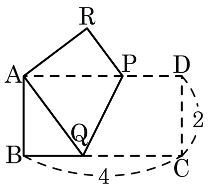
직선이 원의 넓이를

이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

중심이 $(-3,2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,

$2=3k-1 \Rightarrow \quad k=1$

7. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $4, 2$ 인 직사각형 모양의 종이 ABCD 를 접어서 대각선의 양 끝점 A 와 C 가 겹쳐지도록 하였다. 이 때, 선분 BR 의 길이를 구하면?

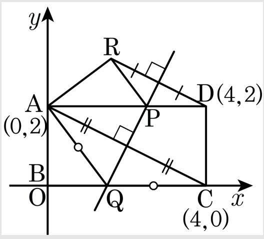


① $8\sqrt{5}$　　② $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$　　③ $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

④ $\dfrac{8\sqrt{5}}{7}$　　⑤ $\dfrac{8\sqrt{5}}{9}$

해설

다음 그림과 같이 점 B 가 원점이 되도록 사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 나타내면



$\mathrm{A}(0,2), \mathrm{B}(0,0), \mathrm{C}(4,0), \mathrm{D}(4,2)$

이 때, 두 점 A, C 와 두 점 D, R 는

각각 직선 PQ 에 대하여 대칭이다.

따라서 직선 PQ 는 직선 AC 와 수직이고,

직선 AC 의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$ 이므로

직선 PQ 의 기울기는 2 이다.

또한, 직선 PQ 는 선분 AC 의 중점 $(2, 1)$ 을 지난다.

따라서, 직선 PQ 의 방정식은 $y-1=2(x-2)$,

즉 $y=2x-3$

결국 점 $\mathrm{D}(4,2)$ 를 직선 $y=2x-3$ 에 대하여

대칭이동한 점이 R 이다.

이 때, $\mathrm{R}(a, b)$ 라고 하면

직선 DR과 직선 $y=2x-3$ 이 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-4}\cdot 2=-1$$

$\therefore a+2b=8 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 선분 DR 의 중점 $\left(\dfrac{a+4}{2}, \dfrac{b+2}{2}\right)$ 는

직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$$\frac{b+2}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-3$$

$\therefore 2a-b=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{8}{5}, b=\frac{16}{5}$$

$$\therefore \mathrm{R}\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{BR}}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{256}{25}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

8. 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2-c=0$ 이 된다고 한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -18 ② -16 ③ 0 ④ 22 ⑤ 23

해설

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

즉, $(2,4)$ 를 $y=ax+b$ 에 대칭이동하면 $(0,0)$

1) $(2,4)$ 와 $(0,0)$ 의 중점은 $y=ax+b$ 를 지난다. $\Rightarrow 2=a+b$

2) $(2,4),(0,0)$ 을 잇는 선분은 $y=ax+b$ 에 수직이다.

$\Rightarrow 2=-\frac{1}{a}, a=-\frac{1}{2}$

1), 2) 에 의해 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=20,$

$a+b+c=22$

9. 직선 $y=0$ 을 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭이동시킨 직선과 $x-y+2=0$ 과의 교점을 P 라 할 때 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

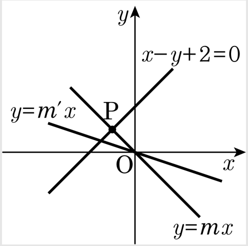
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

직선 $y=0$ 을 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭 이동시킨 직선을 $y=m'x$ 이라 할 때

$y=m'x$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점을 P 라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은 원점에서 직선 $x-y+2=0$ 에 이르는 거리와 같다.



따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값은 $\dfrac{|2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$ 이다.

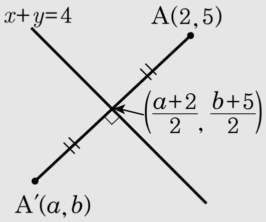
10. 두 점 $\mathrm{A}(2,5), \mathrm{B}(7,0)$ 과 직선 $x+y=4$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값과 이때의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $\sqrt{17}, \mathrm{P}(2,-1)$　② $2\sqrt{17}, \mathrm{P}(3,1)$　③ $3\sqrt{17}, \mathrm{P}(5,2)$

④ $4\sqrt{17}, \mathrm{P}(4,8)$　⑤ $5\sqrt{17}, \mathrm{P}(1,2)$

해설

점 $\mathrm{A}(2,5)$ 를 직선 $x+y=4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(a,b)$ 로 놓으면



선분 AA′ 의 중점$\left(\dfrac{a+2}{2}, \dfrac{b+5}{2}\right)$ 는

직선 $x+y=4$ 위에 있으므로

$$\frac{a+2}{2}+\frac{b+5}{2}=4$$

$\therefore a+b=1 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 직선 AA′ 은 $x+y=4$ 와 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-2}\cdot(-1)=-1$$

$\therefore a-b=-3 \cdots\cdots$ ㉡

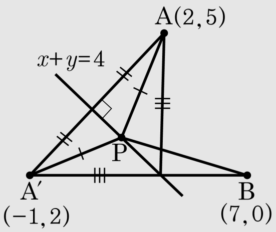
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, b=2$

$\therefore \mathrm{A}'(-1,2)$

이때, 다음 그림에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} &= \overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\\ &\geq \overline{\mathrm{A'B}}\\ &= \sqrt{(7+1)^2+(0-2)^2}\\ &= \sqrt{68}=2\sqrt{17}\end{aligned}$$



따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{17}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=2\sqrt{17}$ 일 때의 점 P 는 직선 A′B 와 직선 $x+y=4$ 의 교점이다.

두 점 $\mathrm{A}'(-1,2), \mathrm{B}(7,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y-0=\frac{0-2}{7-(-1)}(x-7),$$

$$y=-\frac{1}{4}(x-7)$$

$\therefore x+4y-7=0$

두 방정식 $x+4y-7=0$, $x+y-4=0$ 을 연립하여 풀면

$x=3, y=1$

$\therefore \mathrm{P}(3,1)$

따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소일 때의 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(3,1)$