1. 두 실수 x, y에 대하여 등식 $(1+i)(x-yi)=3+i$가 성립 할 때, $2x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

$(x+y)+(x-y)i=3+i$

$\therefore\ x+y=3,\ x-y=1$

$\therefore\ x=2,\ y=1$

$\therefore\ 2x+y=5$

2. 등식 $x+y+(x-2y)i=1+7i$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3 ② −3 ③ 6 ④ −6 ⑤ 8

해설

복소수의 상등에 의하여

$x+y=1,\ x-2y=7$

$x=3,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-6$

3. 등식 $(a+3b)+(a-2b)i=7-3i$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(a+3b)+(a-2b)i=7-3i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의해서 $a+3b=7$, $a-2b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$

$\therefore\ a-b=1-2=-1$

4. $(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$ 를 계산하면?

① $17-i$ ② $3+i$ ③ $3-i$ ④ $7+i$ ⑤ $7-i$

해설

$(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$
$=(1+9)-(6-i+1)$
$=3+i$

5. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$
복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$
$\therefore\ a = 1$
$$\begin{aligned} \therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i) \\ &= 1-(-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

6. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

7. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=5$를 만족하는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 곱 ab의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}=5$

$a(1+i)+b(1-i)=10,$

$(a+b)+(a-b)i=10$

$a+b=10,\ a-b=0$

$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

8. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i$$ 이므로

$2-\dfrac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\dfrac{7}{3}\right)=2+7=9$

9. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$ ② 2 ③ $\dfrac{8}{5}$ ④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ 3

해설

$$\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}$$
$$=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$$

10. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3개

11. $x=2007,\ y=4331$일 때, $\frac{x+yi}{y-xi}+\frac{y-xi}{x+yi}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ i　　⑤ $-i$

해설

$\frac{x+yi}{y-xi}+\frac{y-xi}{x+yi}$

$=\frac{(x+yi)^2+(y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$=\frac{x^2+2xyi-y^2+y^2-2xyi-x^2}{(y-xi)(x+yi)}$

$=0$

해설

$\frac{x+yi}{y-xi}+\frac{y-xi}{x+yi}$

$=\frac{i(y-xi)}{y-xi}+\frac{-i(x+yi)}{x+yi}$

$=i+(-i)$

$=0$

12. 복소수 $x = a + bi$(a, b는 실수)가 $x^2 = 3 + 4i$, $x^3 = 2 + 11i$를 만족할 때 $a + b$의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3 = x^2 \times x$
$= (3 + 4i)(a + bi)$
$= (3a - 4b) + (4a + 3b)i$

$(3a - 4b) + (4a + 3b)i = 2 + 11i$

$3a - 4b = 2, 4a + 3b = 11$

$\therefore a = 2, b = 1$ 이므로 $a + b = 3$

해설

$x = \dfrac{x^3}{x^2} = a + bi$

$\dfrac{2 + 11i}{3 + 4i} = \dfrac{(2 + 11i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$
$= \dfrac{50 + 25i}{25}$
$= 2 + i$

$\therefore a = 2, b = 1$

13. $(3+4i)^5(15-20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5^7 ② 5^{10} ③ 5^{12} ④ 5^{15} ⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3+4i)^5(3-4i)^5 \\ &= 5^5\{(3+4i)(3-4i)\}^5 \\ &= 5^5(5^2)^5 \\ &= 5^{15}\end{aligned}$$

14. $(1+i)^6-(1-i)^6$ 을 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 16　② -16　③ $16i$　④ $-16i$　⑤ 0

해설

$(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$,
$(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$\therefore\ (1+i)^6-(1-i)^6$
$=\{(1+i)^2\}^3-\{(1-i)^2\}^3$
$=(2i)^3-(-2i)^3$
$=8i^3+8i^3$
$=16i^3=-16i$

15. $4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$ ② 3 ③ $4i$
④ 5 ⑤ $1+3i$

해설

$4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$
$=4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$
$=4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
$=4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3$

16. $z \cdot \bar{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 $z_1,\ z_2$ 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$ 는 각각 $z_1,\ z_2$ 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
($a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)로 놓으면
$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서
$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠
$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서
$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡
$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a + c = 2,\ b + d = 0$
㉠ − ㉡을 하면
$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$
$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$
그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$
$\therefore\ a = -c$ 또는 $a = c$
그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$
㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$
따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로
$z_1 \cdot z_2 = 1$

17. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

18. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

② $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이면 $\alpha=r,\ \beta=\delta$

③ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

④ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

⑤ $\alpha^2<0$

해설

① $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.
② $\alpha=1,\ \beta=1$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i$ 이고, $r=2,\ \delta=-1+i$ 이면 $r+\delta i=1+i$ 에서 $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이지만 $\alpha\neq r,\ \beta\neq\delta$ 이다.
③ $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha^2+\beta^2=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.
④ $\alpha\neq 0$ 이고 $\beta\neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta=0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta=0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
⑤ (순허수)$^2<0$ 이나 $\alpha=1+i$ 이면 $\alpha^2=(1+i)^2=2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

19. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다. $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$ 을 간단히 하면?

① $1+i$　② $1-i$　③ $2+i$　④ $2-i$　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

20. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

$i(1+i)^n = p(p>0)$, $(1+i)^n = \frac{p}{i} = -pi$

즉, $(1+i)^n =$ 음수 $\times\, i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$n = 2k$ 일 때, $(1+i)^{2k} = (2i)^k$

$k = 4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$k = 4m+1 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+1} \Rightarrow$ 양수 $\times\, 2i$

$k = 4m+2 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+2} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-4)$

$k = 4m+3 \Rightarrow (1+i)^{2k} = (2i)^k = (2i)^{4m+3} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-8i)$

따라서 $k = 4m+3$, 즉 $n = 2k = 8m+6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.