

1. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근을 a 라 할 때, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$x = a$ 를 대입하면 $a^2 - 3a + 1 = 0$

양변을 a 로 나누면 $a - 3 + \frac{1}{a} = 0$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

2. 다음 중 $x^2 - 3x - 10 = 0$ 과 서로 같은 것은?

- ① $x + 2 = 0$ 또는 $x - 5 = 0$ ② $x + 2 \neq 0$ 또는 $x - 5 = 0$
③ $x + 2 = 0$ 또는 $x - 5 \neq 0$ ④ $x + 2 \neq 0$ 또는 $x - 5 \neq 0$
⑤ $x + 2 = 0$ 또는 $x + 5 = 0$

해설

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x + 2 = 0 \text{ 또는 } x - 5 = 0$$

3. 이차방정식 $2(x-2)(x+3) = (x+5)^2 - 4$ 의 두 근을 m, n 이라고 할 때, $m - n$ 의 값은? (단, $n > m$)

① -14

② -11

③ -8

④ 8

⑤ 14

해설

식을 정리하면 $x^2 - 8x - 33 = 0$

$(x - 11)(x + 3) = 0$

$x = -3$ 또는 $x = 11$ 이므로

$m = -3, n = 11$

$\therefore m - n = -14$

4. x 에 관한 이차방정식 $(a-1)x^2 - (a^2+1)x + 2(a+1) = 0$ 의 한 근이 3 일 때, 두 근의 곱은? (a 는 정수)

① 2

② 3

③ 2, 3

④ -6

⑤ 6

해설

$x = 3$ 을 대입하면 $3a^2 - 11a + 10 = 0$

인수분해하면 $(3a - 5)(a - 2) = 0$

$a = 2$ ($\because a$ 는 정수)

$x^2 - 5x + 6 = 0$ 을 인수분해하면 $(x - 3)(x - 2) = 0$

$x = 3$ 또는 $x = 2$

따라서 두 근의 곱은 6이다.

5. $a > 0$ 인 상수 a 에 대하여 이차방정식 $x^2 + 2(2a-1)x + (3a^2 - 4a + 1) = 0$ 의 두 근 중 작은 근이 이차방정식 $4x^2 - 12px + 9p^2 = 0$ 의 근과 같을 때, $2a + p$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + 2(2a-1)x + (3a^2 - 4a + 1) = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 2(2a-1)x + (3a-1)(a-1) = 0$$

$$(x+3a-1)(x+a-1) = 0$$

$$\therefore x = -3a+1 \text{ 또는 } x = -a+1$$

$a > 0$ 이므로 두 근 중 작은 근은

$$x = -3a+1 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$4x^2 - 12px + 9p^2 = 0 \text{에서 } (2x-3p)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3p}{2} \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{L}}\text{에서 } -3a+1 = \frac{3p}{2}$$

$$\therefore 2a+p = \frac{2}{3}$$

6. 이차방정식 $(x-3)^2 = 4x$ 와 공통인 해를 갖는 방정식은?

① $x^2 - 4x + 3 = 0$

② $x^2 - 6x + 9 = 0$

③ $x^2 - 10x = 9$

④ $x^2 + 10x + 9 = 0$

⑤ $2x^2 - 5x - 3 = 0$

해설

$$(x-3)^2 = 4x$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4x = 0$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 9$$

① $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

7. 다음 중 중근을 갖는 것을 모두 고르면?

① $(x-2)^2 = 8x$

② $x^2 - 4x + 3 = 1$

③ $x(x+6) = -9$

④ $x(x-6) + 24 = 2x + 8$

⑤ $4x^2 - 4x + 4 = 0$

해설

③ $x(x+6) = -9$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 = 0$$

$$\therefore x = -3(\text{중근})$$

④ $x(x-6) + 24 = 2x + 8$

$$x^2 - 6x + 24 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 4(\text{중근})$$

8. 이차방정식 $(x+3)^2 - 6 = 0$ 을 풀면?

① $x = 3 \pm \sqrt{6}$

② $x = 3 \pm \sqrt{2}$

③ $x = -3 \pm \sqrt{6}$

④ $x = -3 \pm \sqrt{2}$

⑤ $x = -2 \pm \sqrt{6}$

해설

$$(x+3)^2 - 6 = 0, (x+3)^2 = 6$$

$$x+3 = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x = -3 \pm \sqrt{6}$$

9. 다음 보기에서 해가 없는 이차방정식을 모두 골라라. (단, 완전제곱식을 이용하여라.)

보기

$$\textcircled{㉠} x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\textcircled{㉡} x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$\textcircled{㉢} \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\textcircled{㉣} \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} = 0$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

$$\textcircled{㉠} x^2 - 3x = -5$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -5 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$$

따라서 제곱한 수는 음수가 될 수 없으므로 해가 없다.

$$\textcircled{㉡} x^2 + 4x = -2$$

$$x^2 + 4x + 4 = -2 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 2$$

$$\textcircled{㉢} \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 0 \text{ 에서 양변에 2 를 곱하면 } x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{3}{2}$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{3}{2} + \frac{4}{9}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{35}{18}$$

$$\textcircled{㉣} \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} = 0 \text{ 에서 양변에 3 을 곱하면 } x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{3}{16}$$

따라서 제곱한 수는 음수가 될 수 없으므로 해가 없다.

10. 완전제곱식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀 때, 근으로 알맞은 것은?

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

① $2 \pm \sqrt{2}$

② $3 \pm \sqrt{2}$

③ $3 \pm \sqrt{3}$

④ $2 \pm \sqrt{3}$

⑤ $4 \pm \sqrt{2}$

해설

$$x^2 - 4x = -2, x^2 - 4x + 4 = -2 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 2$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{2}$$

11. $\frac{3}{5}x^2 = \frac{2}{3}x - a$ 의 근이 $x = \frac{b \pm \sqrt{7}}{9}$ 일 때, $3ab$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$9x^2 - 10x + 15a = 0$ 이므로

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{10^2 - 4 \times 9 \times 15a}}{2 \times 9}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 540a}}{18}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 135a}}{9}$$

따라서 $25 - 135a = 7$ 이므로 $a = \frac{2}{15}$, $b = 5$ 이다.

$$\therefore 3ab = 3 \times \frac{2}{15} \times 5 = 2$$

12. $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수일 때, 양의 실수 x 에 대하여 $x^2 + (x - [x])^2 = 18$ 이 성립할 때, $(x - [x])^2 + \frac{1}{(x - [x])^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$0 \leq x - [x] < 1 \text{ 이므로 } 0 \leq (x - [x])^2 < 1$$

$$x^2 + (x - [x])^2 = 18 \text{ 에서 } (x - [x])^2 = 18 - x^2$$

$$0 \leq 18 - x^2 < 1$$

$$\therefore \sqrt{17} < x \leq \sqrt{18}$$

즉 $[x] = 4$ 이므로 $x^2 + (x - [x])^2 = 18$ 에 대입하면

$$2x^2 - 8x - 2 = 0, x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 2 + \sqrt{5} \quad (\because x > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore (x - [x])^2 + \frac{1}{(x - [x])^2} &= (2 + \sqrt{5} - 4)^2 + \frac{1}{(2 + \sqrt{5} - 4)^2} \\ &= 9 - 4\sqrt{5} + \frac{1}{9 - 4\sqrt{5}} \\ &= 9 - 4\sqrt{5} + 9 + 4\sqrt{5} \\ &= 18 \end{aligned}$$

13. 이차방정식 $(x+2)^2 - 8 = 2(x+2)$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha > \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$$x + 2 = t \text{로 치환하면 } t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t - 4)(t + 2) = 0$$

$$t = 4 \text{ 또는 } t = -2$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -4$$

$$\therefore \alpha\beta = 2 \times (-4) = -8$$

14. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k + 2 = 0$ 의 해가 1개일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$3x^2 - 6x + k + 2 = 0$$

$$3(x^2 - 2x) = -k - 2$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = -k - 2 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = -k + 1$$

중근을 가져야 하므로 $-k + 1 = 0$, $k = 1$ 이다.

15. 이차방정식 $kx^2 + 4x + 1 = 0$ 이 서로 다른 두 근을 갖게 될 k 의 범위는?

① $k > 4$

② $k < 4$

③ $k \geq 4$

④ $k \leq 4$

⑤ $-4 \leq k \leq 4$

해설

$$\frac{D}{4} = 2^2 - k > 0$$

$$\therefore k < 4$$

16. 다음 이차방정식 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\alpha^2 + \beta}{\alpha} + \frac{\beta^2 + \alpha}{\beta}$ 의 값을 구하면?

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = -4$, $\alpha\beta = 1$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-4)^2 - 2 \times 1 = 14$$

$$\therefore \frac{\alpha^2 + \beta}{\alpha} + \frac{\beta^2 + \alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2\beta + \beta^2 + \alpha\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1 \times (-4) + 14}{1}$$

$$= 10$$

17. 이차방정식 $x^2 - 3x + k - 10 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 15$ 이다. 이때, 근과 계수의 관계를 이용하여 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = k - 10$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2(k - 10) = 15$$

$$\therefore k = 7$$

18. 이차방정식 $2x^2 - 2ax + 12 = 0$ 의 두 근의 비가 $2 : 3$ 이 되는 a 의 값은?

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

두 근을 각각 $2k, 3k(k \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2(x - 2k)(x - 3k) &= 2x^2 - 10kx + 12k^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + 12 \end{aligned}$$

$$\therefore k = \pm 1$$

$$10k = 2a \text{ 이므로}$$

$$k = 1 \text{ 일 때 } a = 5$$

$$k = -1 \text{ 일 때 } a = -5$$

$$\therefore a = \pm 5$$

19. x^2 의 계수가 3인 이차방정식이 있다. x 의 계수를 바꾸었더니 두 근이 1과 2가 되었고, 상수항을 바꾸었더니 두 근이 4와 $-\frac{1}{3}$ 이 되었다. 처음 주어진 이차방정식의 두 근 중 큰 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$3(x-1)(x-2) = 0 \text{에서 } 3x^2 - 9x + 6 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3(x-4)(x+\frac{1}{3}) = 0 \text{에서 } 3x^2 - 11x - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 x 의 계수를 바꾸었고 ㉡에서 상수항을 바꾸었으므로 원래의 이차방정식은

$$3x^2 - 11x + 6 = (x-3)(3x-2) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}$$

따라서 큰 근은 $x = 3$ 이다.

20. 이차방정식 $x^2 - 5x + 7 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 5x + 7 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 7$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 을 두 근으로 하는 이차방정식에서
두 근의 합은

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = \alpha + \beta - 2 = 5 - 2 = 3$$

두 근의 곱은

$$\begin{aligned}(\alpha - 1)(\beta - 1) &= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \\ &= 7 - 5 + 1 = 3\end{aligned}$$

$$\therefore x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$a = -3, b = 3$$

$$\therefore b - a = 3 - (-3) = 6$$

21. 1부터 n 까지의 자연수만의 합은 다음과 같다. 이때, 합이 78이 되려면 1부터 n 까지의 수를 더해야 한다고 할 때, n 을 구하여라.

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\frac{n(n+1)}{2} = 78 \text{ 이므로}$$

$$n^2 + n - 156 = 0$$

$$(n-12)(n+13) = 0$$

$$n > 0 \text{ 이므로 } n = 12 \text{ 이다.}$$

22. 어떤 수 x 에 4를 더하여 제공해야 할 것을 잘못하여 4배를 하였다. 그런데도 결과는 같았다. 이 때, x 의 값은?(단, $x < 0$)

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$(x + 4)^2 = 4(x + 4)$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x + 4) = 0$$

$$\therefore x = -4 (\because x < 0)$$

23. 책을 펼쳐서 나타난 쪽수의 곱이 156 이었을 때, 뒷 쪽의 쪽수를 구하여라.

▶ 답: 쪽

▷ 정답: 13 쪽

해설

펼쳐진 책의 쪽수를 $x - 1$, x 라 하면

$$(x - 1)x = 156$$

$$(x - 13)(x + 12) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 13 \text{ (쪽)}$$

24. 지면으로부터 40 m 되는 건물의 꼭대기에서 초속 40 m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라 할 때, $h = 40t - 5t^2 + 40$ 인 관계가 성립한다. 지면으로부터 높이가 100 m 일 때는 물체를 쏘아 올린지 몇 초 후인지 모두 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: 초

▷ 정답: 2 초

▷ 정답: 6 초

해설

$h = 100$ 이므로 $h = 40t - 5t^2 + 40$ 에서

$$40t - 5t^2 + 40 = 100$$

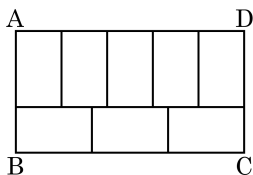
$$5t^2 - 40t + 60 = 0$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$(t - 2)(t - 6) = 0$$

$t = 2$ 또는 $t = 6$ 이다.

25. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 를 8개의 똑같은 직사각형으로 나누었다. 직사각형 ABCD 의 넓이가 480cm^2 일 때, 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 92 cm

해설

작은 직사각형 한 개의 넓이 : $\frac{480}{8} = 60 (\text{cm}^2)$

작은 직사각형의 짧은 변의 길이를 x 라고 하면 긴 변의 길이는 $\frac{5}{3}x$ 이다.

$$\frac{5}{3}x \times x = 60, x^2 = 36, x = 6 (\text{cm})$$

$$\overline{AD} = 5x, \overline{AB} = \frac{5}{3}x + x = \frac{8}{3}x$$

따라서 둘레의 길이는 $\left(5x + \frac{8}{3}x\right) \times 2 = \frac{46}{3}x = 92 (\text{cm})$ 이다.