

1. 588 을 588 보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 249

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$$\frac{588}{a} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{a} = k^2 = b \text{ 라 하면,}$$

a 는 3, $2^2 \times 3$, 3×7^2 이 가능하다.

$$a = 3 \text{ 일 때, } b = 14^2 = 196$$

$$a = 2^2 \times 3 \text{ 일 때, } b = 7^2 = 49$$

$$a = 3 \times 7^2 \text{ 일 때, } b = 2^2 = 4$$

588 보다 작다고 했으므로 $a = 2^2 \times 3 \times 7^2$ 일 때는 제외한다.

$$\therefore 196 + 49 + 4 = 249$$

2. $3^2 \times 5 \times 7$ 에 자연수 a 를 곱하면 어떤 자연수의 제곱인 수가 된다. a 의 최솟값은?

① 5 ② 7 ③ 15 ④ 21 ⑤ 35

해설

$3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱인 수가 되려면 $3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 $5 \times 7 = 35$ 이다.

3. 60 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 20

해설

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 $3 \times 5 = 15$

4. 120 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값이 될 수 없는 것은?

① $2 \times 3 \times 5$

② $2^3 \times 3 \times 5$

③ $2 \times 3^3 \times 5$

④ $2 \times 3 \times 5 \times 7^2$

⑤ $2^2 \times 3 \times 5$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 로 소인수분해되므로 소인수 2, 3, 5의 지수가 홀수인 수를 곱한다.

$2^2 \times 3 \times 5$ 은 2² 을 곱하였으므로 제곱수가 될 수 없다.

5. 자연수 a, b 에 대하여 $2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하는 b 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$2^2 \times 5 \times a = b^2$ 을 만족하려면 $2^2 \times 5 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 b 의 최솟값은 $a = 5$ 일 때 $2 \times 5 = 10$ 이다.

6. $2^2 \times 5 \times 7$ 의 약수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 12 개

해설

약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 12$ (개)

7. 자연수 $2^3 \times 3^a$ 의 약수의 개수가 12 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(3+1)(a+1) = 12$$

$$a+1 = 3$$

$$\therefore a = 2$$

8. $\square \times 3^3$ 은 약수의 개수가 8 개인 자연수이다. 다음 중 \square 안에 알맞은 수 중 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$8 = (3 + 1) \times (1 + 1)$ 이므로

$\square = a$ (a 는 소수),

가장 작은 소수는 2,

$\therefore \square = 2$

9. $2^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때, \square 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$15 = 5 \times 3 = (4 + 1) \times (2 + 1)$$

\square 에 알맞은 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

$\therefore 9$

10. $5^6 \times \square$ 의 약수의 개수가 21 개일 때, \square 안에 들어갈 수 있는 자연수 중 가장 작은 것은?

- ① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$21 = 7 \times 3 = (6 + 1) \times (2 + 1)$$

\square 에 알맞은 가장 작은 자연수는 $2^2 = 4$

$\therefore 4$

12. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2) \overline{48}$$

$$2) \overline{24}$$

$$2) \overline{12}$$

$$2) \overline{6}$$

$$3$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 \square 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

13. 540 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수는?

- ① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 15

해설

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

$540 \times x$ 가 제곱수가 되기 위한 가장 작은 x 는 $3 \times 5 = 15$

14. 28 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned}28 \times a &= b^2 \text{ 에서} \\ 28 &= 2^2 \times 7 \\ a &= 7 \\ 2^2 \times 7 \times 7 &= b^2 \\ 2^2 \times 7^2 &= b^2 \\ b &= 2 \times 7 = 14\end{aligned}$$

15. 140 에 어떤 자연수를 곱하였더니 자연수 b 의 제곱이 되었다. 곱할 수 있는 자연수 중 가장 작은 자연수를 a 라 할 때, $140 \times a$ 의 값은?

① 3600

② 4900

③ 6400

④ 8100

⑤ 10000

해설

어떤 자연수를 소인수분해했을 때, 모든 소인수의 지수가 짝수이면 그 수는 다른 자연수의 제곱이 된다.

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

5 와 7 의 지수가 홀수이므로 제곱수가 되기 위해 곱해 주어야 하는 수는 $5 \times 7 \times x^2$ (x^2 은 자연수) 꼴이다.

따라서 가장 작은 수 $a = 5 \times 7 = 35$ 이다.

$$140 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 = (2 \times 5 \times 7)^2 = (70)^2 = 4900$$

16. 48 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음에서 x 가 될 수 있는 수를 모두 고르면(정답 2개)?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 9 ⑤ 12

해설

$$48 = 2^4 \times 3$$

곱해야 할 자연수가 x 이고, 어떤 자연수를 y 라 하면 $(2^4 \times 3) \times x = y^2$ 이다.

$$x = 3 \times 1^2, 3 \times 2^2, \dots$$

$$= 3, 12, \dots$$

17. 420 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이 때, 곱할 수 있는 가장 작은 네 자리의 자연수는?

① 1024 ② 1280 ③ 1440 ④ 1680 ⑤ 2048

해설

$420 \times n = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n = m^2$ 이라 하면

가장 작은 $n = 3 \times 5 \times 7$

따라서 n 은

$$3 \times 5 \times 7 \times 1^2 = 105$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 2^2 = 420$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 3^2 = 945$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 4^2 = 1680$$

그러므로 가장 작은 네 자리의 자연수 n 은 1680 이다.

19. 자연수 a, b, c 에 대하여 $750a = 180b = c^2$ 이 성립할 때, c 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 150

해설

$750a = 2 \times 3 \times 5^3 \times a$, $180b = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times b$,
위 두 식이 가장 작은 c^2 의 형태가 되려면,
 $a = 2 \times 3 \times 5$, $b = 5^3$ 이어야 한다.
따라서,
 $c^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^4$
 $\therefore c = 150$

20. 자연수 a, b, c 에 대하여 $120a = 270b = 150c$ 이 성립할 때, $a+b+c$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 101

해설

$$120a = 2^3 \times 3 \times 5 \times a,$$

$$270b = 2 \times 3^3 \times 5 \times b,$$

$$150c = 2 \times 3 \times 5^2 \times c \text{ 이므로}$$

a, b, c 가 가장 작아지는 값은

$$120a = 270b = 150c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \text{ 이다.}$$

$$\rightarrow a = 45, b = 20, c = 36$$

$$\therefore a + b + c = 101$$

21. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$\begin{aligned} 2^4 \times 3 \times x &= y^2 \\ \text{가장 작은 } x &= 3, \\ 2^4 \times 3 \times 3 &= 2^4 \times 3^2 = y^2 \\ y &= 2^2 \times 3 = 12 \\ \frac{x}{y} &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

22. 108 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수를 곱하면 되는가?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$108 = 2^2 \times 3^3$ 이므로 곱해야할 가장 작은 자연수는 3

23. $\frac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2 \overline{)252}$$

$$2 \overline{)126}$$

$$3 \overline{)63}$$

$$3 \overline{)21}$$

$$7$$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값
중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

24. $3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 12 개일 때, 자연수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3^2 \times 7^a$ 의 약수의 개수는 $(2+1) \times (a+1) = 12$ (개)
즉, $3 \times (a+1) = 12$ 이므로 $a = 3$ 이다.

25. 자연수 672의 약수의 개수와 $2^2 \times a^n \times 11^3$ 의 약수의 개수가 같을 때, n 의 값을 구하여라. (단, a 는 소수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$672 = 2^5 \times 3 \times 7$$

(약수의 개수) = 24(개)

$$(2+1) \times (n+1) \times (3+1) = 24$$

$$\therefore n = 1$$

26. 자연수 135의 약수의 개수와 $3 \times 5^n \times a^m$ 의 약수의 개수가 같을 때, $n+m$ 의 값은? (단, m, n 은 자연수이고, $a \neq 3, 5$ 인 소수)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$135 = 3^3 \times 5$$

$$(\text{약수의 개수}) = 4 \times 2 = 8(\text{개})$$

$$(1+1) \times (n+1) \times (m+1) = 8, n=1, m=1$$

$$\text{그러므로 } n+m = 1+1 = 2$$

27. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 \square 안에 들어 갈 수 없는 수를 모두 고르면?

- ① 3 ② 4 ③ 7 ④ 9 ⑤ 16

해설

② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)이다.

④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3+1) \times (2+1) = 12$ (개)이다.

28. $20 \times \square$ 의 약수의 개수가 18개일 때, \square 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

- ① 4 ② 8 ③ 9 ④ 25 ⑤ 49

해설

(i) $\square = 2^a$ 일 때 $18 = (8+1) \times (1+1)$ 이므로
 $\square = 2^6 = 64$

(ii) $\square \neq 2^a$ 일 때 $18 = (2+1) \times (a+1) \times (1+1)$
 $a = 2$, 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

\therefore (i), (ii)에서 가장 작은 자연수는 9

29. $3^3 \times a$ 는 약수의 개수가 12 인 수 중 가장 작은 홀수라고 할 때, a 에 맞는 수를 구하면?

- ① 1 ② 4 ③ 9 ④ 25 ⑤ 36

해설

$$12 = 4 \times 3 = (3 + 1) \times (2 + 1)$$

$3^3 \times a$ 가 홀수이므로

a 는 3 보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$

30. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3개인 자연수는 모두 몇 개인가?

- ① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는 1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로 자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다. 따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면 $13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로 200 이하인 소수의 완전제곱수는 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.