1. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+1=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면
$D=(a+2)^2-4=0$이므로
$a^2+4a+4-4=a^2+4a=0$
따라서 $a=0$또는 $a=-4$
따라서 상수 a의 값의 합은 -4

2. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$
$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$
$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$
(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로
x^2 의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$
(ii) 주어진 이차방정식이
허근을 갖기 위해서는
판별식 $D < 0$ 이어야 하므로
$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$
$37 + 12k < 0$
$\therefore k < -\frac{37}{12}$
따라서 최대정수는 -4 이다.

3. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k 에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

4. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

5. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$

$4-2a^2=0,\ a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$

6. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근 을 가진다.

② $x^2+5=0$는 두 허근을 가진다.

③ $m=0$ 또는 4일 때, $x^2-mx+m=0$은 중근을 가진다.

④ $k \geqq 1$일 때 $x^2-2x+2-k=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2-6x+a=0$ 은 $a=9$일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25-4\cdot1\cdot1=21>0$
② $0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
③ $(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0$
⑤ $9-1\cdot a=9-a=0,\ a=9$
$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2-1\cdot(2-k)=k-1>0\ \therefore\ k>1$

7. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

8. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(ⅰ) $a=0$ 일 때 : $x=\frac{a+2}{2}$

(ⅱ) $a\neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D'=1+a(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geq 0$

∴ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

9. 이차방정식 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$이 중근을 가질 조건을 구하면?(단, $a \neq b$)

① $a=b+c$　② $2a=b+c$　③ $a=b-c$
④ $2a=b-c$　⑤ $2a=2b-c$

해설

$D=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)$
$=b^2+c^2-2bc-4(ac-a^2-bc+ab)$
$=4a^2+b^2+c^2-4ac+2bc-4ab$
$=(2a-b-c)^2$
준식이 중근을 가져야 하므로
$D=0$이어야 한다.
따라서, $(2a-b-c)^2=0,\ 2a-b-c=0$
$\therefore 2a=b+c$

10. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y - 4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \ge -2$　② $a \ge 4$　③ $a \le 4$

④ $a \ge -4$　⑤ $a \ge 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면
$x^2 - kx + (2k-a) = 0$
실근을 가지려면 판별식 $D \ge 0$이어야 한다.
$k^2 - 4(2k-a) \ge 0$
$k^2 - 8k + 4a \ge 0$
위 부등식을 k에 대하여 정리하면
$(k-4)^2 + 4a - 16 \ge 0$
실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
판별식 $\frac{D}{4} \le 0$이거나,
$4a - 16 \ge 0 (\because (k-4)^2 \ge 0)$이어야 한다.
따라서 $a \ge 4$

12. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

13. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

14. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\ \cdots\cdots$㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}\ \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

16. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $mx^2+2(a-b-m)x-a+m+1=0$ 이 m의 값에 관계없이 중근을 갖도록 하는 실수 $a,\ b$의 값은?

① $a=-1,\ b=0$ ② $a=-1,\ b=-1$

③ $a=0,\ b=1$ ④ $a=1,\ b=1$

⑤ $a=1,\ b=2$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 할 때,
$m \neq 0$이고, 중근을 가지려면
$D=0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=(a-b-m)^2-m(-a+m+1)$
$a^2+b^2-2ab+2bm-am-m=0$
이 때, 이 등식이 m의 값에 관계없이
항상 성립해야 하므로
m에 대하여 정리하면
$(2b-a-1)m+(a-b)^2=0$
$2b-a-1=0,\ (a-b)^2=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=1$

17. x에 대한 이차식 $a(1-x^2)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① a를 빗변으로 하는 직각삼각형

② b를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ c를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a(1-x^2)-2bx+c(1+x^2)$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$(c-a)x^2-2bx+a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$c-a \neq 0$이고, $\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$

$b^2-(c^2-a^2)=0, \quad b^2-c^2+a^2=0$

$\therefore c^2=b^2+a^2$

따라서 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

18. 이차식 $x^2-xy-6y^2+ay-1$이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a의 값은?

① 1　② 3　③ 5　④ 10　⑤ 12

해설

$x^2-xy-6y^2+ay-1=0$에서 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4(-6y^2+ay-1)}}{2}$

$=\dfrac{y\pm\sqrt{25y^2-4ay+4}}{2}$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{\ }$안에 있는

$25y^2-4ay+4$가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2-4ay+4=(5y\pm2)^2$

$\therefore -4a=\pm20$,

$a=\pm5$

$\therefore$ 양수 a는 5

19. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\left\{1+(a+b)^2\right\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\left\{1+(a+b)^2\right\}$$

$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\geq 0$$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

즉, $(a+b+1)^2\leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

20. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이 모두 서로 다른 두 허근을 가질 때, $(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$의 근을 판별하면? (단, $ab \neq 0$, $a+b \neq 0$, a, b, c는 실수)

① 중근을 갖는다.

② 두 실근을 갖는다.

③ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

④ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

⑤ 근을 판별할 수 없다.

해설

$ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$이
서로 다른 두 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)$
여기에서 a^2-bc의 부호를 판단하면 되는데
$(b^2-ac)+(c^2-ab)+(a^2-bc)$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geq 0$
㉠, ㉡가 성립하므로 $a^2-bc>0$
$\therefore \frac{D}{4}<0$, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

문제에서 주어진 두 방정식이 각각 허근을 가지면
$b^2-ac<0, b^2<ac \cdots$ ㉠
$c^2-ab<0, c^2<ab \cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 변변끼리 곱하면
$(bc)^2<a^2bc \cdots$ ㉢
$ac>0, ab>0 \Rightarrow bc>0$
㉢의 양변을 bc로 나누면
$bc<a^2 \quad \therefore a^2-bc>0$
$(a+b)x^2+2(b+c)x+(c+a)=0$에서
$\frac{D}{4}=(b+c)^2-(a+b)(c+a)$
$=(b^2-ac)+(c^2-ab)-(a^2-bc)<0$
$(\because b^2-ac<0, c^2-ab<0, a^2-bc>0)$
$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.