1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.

② 설악산은 제주도에 있다.

③ $x = 2$ 이면 $3x = 6$ 이다.

④ $x + 1 < 0$

⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$ 이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 거짓인 명제는?

① 직사각형은 사다리꼴이다.
② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.
③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.
④ x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.
⑤ $(x-3)(y-5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

반례 : $x = 4$

3. 명제 '$a > b$ 이면 $a^2 \geq b^2$ 이다 '의 대우를 구하면?

① $a^2 \geq b^2$ 이면$a > b$이다

② $a^2 > b^2$ 이면 $a \geq b$이다

③ $a^2 < b^2$ 이면 $a \leq b$이다

④ $a \leq b$ 이면 $a^2 < b^2$이다

⑤ $a \geq b$ 이면 $a^2 > b^2$이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

$\therefore\ a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$

4. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.

② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.

③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.

④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.

⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 '$p \rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \rightarrow \sim p$' 이다.
p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

5. 다음 중 $x > 7$ 의 필요조건이고, 충분조건은 되지 않는 것은?

① $x > 7$ ② $x < 7$ ③ $x \geq 7$ ④ $x \leq 7$ ⑤ $x = 7$

해설

$x > 7$ 범위를 포함하는 것을 고르면 $x \geq 7$

6. $x-1=0$이 $2x^2+ax-1=0$이기 위한 충분조건일 때 상수 a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이 참이므로
$x=1$을 대입하면 $2+a-1=0$
$\therefore a=-1$

7. 다음 빈 칸에 알맞은 말을 써 넣어라.

$A \cap B = A$ 인 것은 $A \subset B$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요충분

해설

$A \cap B = A$ 인 것이 곧, $A \subset B$ 을 의미하므로 명제와 역 모두 참이 되는 필요충분조건이다.

8. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < A < C$

④ $C < A < B$　⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로
A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$
$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$
$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.
따라서 $A > B > C$

9. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0,\ b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4\geq 5\cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$

$=5+4=9$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

10. 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19　② 21　③ 23　④ 25　⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,
$3 \geq \sqrt[3]{abc}$,　$27 \geq abc$

11. 명제 'x 가 소수이면 x 는 홀수이다.' 는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

12. 명제「$x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.
(역의 반례 : $x = -5$)

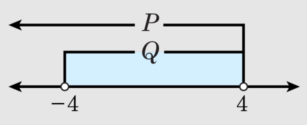
13. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q\ :\ -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

14. 다음 (　　　)안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 (　　　)조건이다.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

15. $x-4=0$ 이 $x^2+ax-48=0$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x-4=0 \Rightarrow x^2+ax-48=0$

$\therefore\ 16+4a-48=0$

$\therefore\ a=8$

16. 명제 $p,\ q,\ r$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요 ② 충분

③ 필요충분 ④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

17. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$A = 3x^2 - xy + 2y^2$
$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$

① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$
④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

18. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^{n}$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^{n}$　② $2^{10n} \leq 1000^{n}$　③ $2^{10n} > 1000^{n}$
④ $2^{10n} \geq 1000^{n}$　⑤ $2^{10n} = 1000^{n}$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^{n} > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^{n}} = \frac{(2^{10})^{n}}{1000^{n}} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^{n} = \left(\frac{1024}{1000}\right)^{n} > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^{n}$

19. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $|a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

20. $x>0, y>0$일 때, $\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\left(3x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{6}{x}\right)=20+3\left(xy+\frac{4}{xy}\right)$

산술기하조건을 사용하면

$xy+\frac{4}{xy}\geq 2\sqrt{xy\times\left(\frac{4}{xy}\right)}=4$

$\therefore$ 최솟값 : $20+3\times 4=32$

21. $x > 2$일 때 $4x + \dfrac{1}{x-2}$의 최솟값은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $t > 0$이고 $x = t + 2$
따라서 주어진 식을 t로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \dfrac{1}{t}$ 일 때 성립)

22. 양수 x에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 b를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$

$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

23. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$이 성립할 때, $x+y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2+3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x+y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x+y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

24. 실수 $a,\ b,\ x,\ y$에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.

25. 다음 중 명제 '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정으로 옳은 것은?

① 어떤 실수의 제곱은 양수이다.
② 모든 실수의 제곱은 양수이다.
③ 어떤 실수의 제곱은 0이다.
④ 모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.
⑤ 어떤 실수의 제곱은 음수가 아니다.

해설

'어떤' 의 부정은 '모든' 이고 '음수이다.' 의 부정은 '음수가 아니다.' 이다.
따라서, '어떤 실수의 제곱은 음수이다.' 의 부정은 '모든 실수의 제곱은 음수가 아니다.' 이다.

26. 실수 x, y 에 대하여 조건 '$|x| + |y| = 0$' 의 부정과 같은 것은?

① $x = y = 0$

② $x = y \neq 0$

③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$

④ x, y 중 적어도 하나는 0 이다.

⑤ x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x| + |y| = 0$ 의 부정은 $|x| + |y| \neq 0$ 이다.
따라서, $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이므로 x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

27. '모든 중학생은 고등학교에 진학한다' 의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.

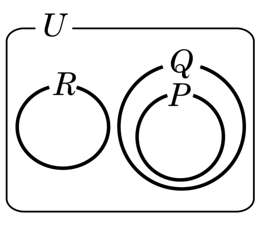
④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 'p 이면 q 이다' 가 'p 이면 q 가 아니다' 이고, '모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 '모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)' 의 부정은 '어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다' 이다.

28. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



① $r \to \sim q$　② $r \to \sim p$　③ $p \to \sim r$　④ $\sim q \to \sim p$　⑤ $p \to \sim q$

해설

명제의 참, 거짓은 각각의 조건을 만족하는 집합의 포함 관계로 판별할 수 있다.
① $R \subset Q^c$ 이므로 $r \to \sim q$ 는 참이다.
② $R \subset P^c$ 이므로 $r \to \sim p$ 는 참이다.
③ $P \subset R^c$ 이므로 $p \to \sim r$ 는 참이다.
④ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \to \sim p$ 는 참이다.
⑤ $P \not\subset Q^c$ 이므로 $p \to \sim q$ 는 거짓이다.

29. 전체집합을 $U = \{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2 > 1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x + y \le 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2 + 2x \ge -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$이다.

⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \ge 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \ge 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \le 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \ge x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

30. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a > 0$) q : $x < -3$ 또는 $x > 1$

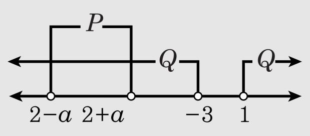
에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하여라.

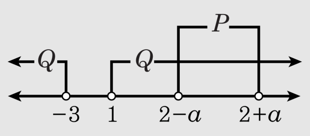
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore$ $2-a < x < 2+a$ $\therefore$
$P = \{x \mid 2-a < x < 2+a\}$, $Q = \{x \mid x < -3$ 또는 $x > 1\}$
따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \leq -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \geq 1$ $\cdots$ ㉡,
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$
그런데 $a > 0$이므로 구하는 a의 범위는 $0 < a \leq 1$

㉠ : 

㉡ : 

$\therefore$ $\alpha = 0$, $\beta = 1$
$\therefore$ $\alpha + \beta = 1$

31. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 두 집합을 각각 P, Q라 하자. $P = \{x \mid x\text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $Q = \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수}\}$ 일 때, $p \to \sim q$ 가 거짓임을 보이는 원소는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 7

해설

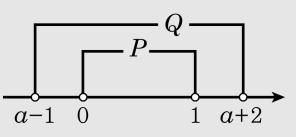
$p \to \sim q$ 의 반례는$P \not\subset Q^c$ 을 만족하는 원소이다.
즉, P 의 원소이면서 Q^c 의 원소가 아닌 것이므로 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$
$\therefore P \cap Q = \{6\}$

32. 명제 '$0 < x \leq 1$ 이면 $a - 1 < x < a + 2$ 이다.' 가 참이 되도록 하는 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-2 < a < 1$　　② $-1 < a < 0$　　③ $-1 < a < 1$

④ $-1 < a \leq 1$　　⑤ $0 < a \leq 2$

해설



$p : 0 < x \leq 1$, $q : a - 1 < x < a + 2$ 라 하고, 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다.

위 그림에서 $a - 1 \leq 0$, $a + 2 > 1$

$a \leq 1$, $a > -1$

$\therefore \ -1 < a \leq 1$

33. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \to q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \to q$는 $\sim q \to \sim p$와 동치임을 이용
$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,
$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \to\ a \leq -1$
2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \to\ a \geq -5$
$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

34. 두 명제 $p \to q$와 $r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $q \to p$　　② $r \to \sim p$　　③ $\sim p \to r$

④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to r$

해설

$p \to q\ (T)$, $\sim q \to \sim p\ (T)$, $r \to \sim q(T)$, $q \to \sim r(T)$

$\therefore\ p \to q \to \sim r$

따라서 $p \to \sim r(T)$, $r \to \sim p(T)$

35. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

36. 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \phi$인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $p \to \sim r$　　② $\sim p \to \sim q$　　③ $q \to r$

④ $q \to \sim r$　　⑤ $r \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \to p \Leftrightarrow \sim p \to \sim q$

$P \cap R = \varnothing \Rightarrow p \to \sim r \Leftrightarrow r \to \sim p$ $q \to p, p \to \sim r$ 이므로 $q \to \sim r$

37. 두 조건 p, q가 $p\ :|x|<a$, $q\ :|x-1|\geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0<a\leq 4$　② $a>4$　③ $a\geq 4$

④ $a>2$　⑤ $2\leq a\leq 4$

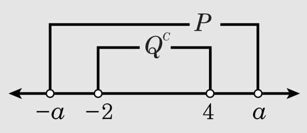
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow \ Q^c \subset P$

$P=\{x|-a<x<a\}$

$Q=\{x|x\leq -2$ 또는 $x\geq 4\}$

$Q^c=\{x|-2<x<4\}$



$-a\leq -2 \rightarrow a\geq 2$, $a\geq 4$

$\therefore a\geq 4$

38. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$　　② $p \Rightarrow \sim r$　　③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$　　⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$

$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$

$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

39. P섬에 사는 사람들은 오직 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 오직 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A, B는 다음과 같이 말했다.

A : 우리는 모두 Q섬에서 왔다.B : 우리들 중 오직 한 사람만이 P섬에서 왔다.

A, B, C는 각각 어느 섬으로부터 왔는가?

① A,B는 P섬, C는 Q섬에서 왔다.

② A,B는 Q섬, C는 Q섬에서 왔다.

③ A,B,C는 모두 Q섬에서 왔다.

④ B 는 P섬, A,C는 Q섬에서 왔다.

⑤ B 는 Q섬, A,C 는 P섬에서 왔다.

해설

A의 말은 거짓이다. 즉, A는 Q섬 사람이고 ‘우리 모두 Q섬 사람이다.’가 거짓이므로 B, C중 P섬 사람이 있어야 한다. 만일 B 가 P섬 사람이면 B의 말이 진실이므로 C는 Q섬에서 왔다. 그러나 B가 Q섬에서 왔다면 B의 말이 거짓이므로 P섬 사람이 둘 이상이어야 하는데 A와 B가 Q섬 사람이므로 모순이다. 따라서, B는 P섬, A,C는 Q섬에서 왔다.

40. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{(가)}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{(다)}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{(라)}$ 그러므로 대우가 $\boxed{(마)}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$ 이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다. ② (나) 1

③ (다) 자연수 ④ (라) 3 의 배수이다.

⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다.}}$
그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$ 이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$ 이다.

41. 다음 중 틀린 것은?

① $a^2 + b^2 = 0$은 $a = b = 0$이기 위한 필요조건이다.

② $xy \le 1$ 또는 $x + y \le 2$는 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$이기 위한 필요충분조건이다.

③ $x = 3$은 $x^2 - x - 6 = 0$이기 위한 충분조건이다.

④ a, b, c가 실수일 때, $ac = bc$는 $a = b$이기 위한 필요조건이다.

⑤ $x + y$가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (필요충분조건)
※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.
② 대우 : $x > 1, y > 1 \Rightarrow xy > 1, x + y > 2$ (참)
이 : $xy > 1, x + y > 2 \nRightarrow x > 1, y > 1$ (거짓) (반례 : $x = 10$, $y = 0.5$)
대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.
$\therefore$ 충분조건

42. 다음은 "실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$, $bx^2+2cx+a=0$, $cx^2+2ax+b=0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다"는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
b^2-ac (가) 0 , c^2-ab (가) 0 , a^2-bc (가) 0
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ (나) 0
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ (나) $0\cdots$㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$(다)$0\cdots$㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

① $<,\ <,\ \geq$ ② $<,\ <,\ >$ ③ $<,\ >,\ <$
④ $\geq,\ \geq,\ \leq$ ⑤ $\geq,\ \leq,\ \geq$

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
$b^2-ac<0,\ c^2-ab<0,\ a^2-bc<0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac<0$
좌변을 변형하면
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$
$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}<0\cdots$㉠
그런데 $a,\ b,\ c$ 는 실수이므로
$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0\cdots$㉡
따라서, ㉡은 ㉠에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

43. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 $a,\ b,\ H$에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r} \cdots\ (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 $a,\ b$에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 $a,\ b,\ H$에 대하여 적당한 실수 r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b},\ \frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b},\ \frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\frac{H-b}{b}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\frac{2ab}{a+b}$

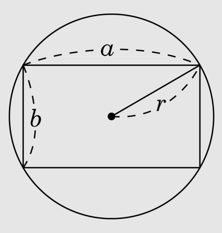
따라서 (다) 필요충분조건

44. 반지름이 $r(\mathrm{cm})$ 인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\mathrm{cm}^2)$ ② $r^2(\mathrm{cm}^2)$ ③ $2r^2(\mathrm{cm}^2)$

④ $\sqrt{2}r^2(\mathrm{cm}^2)$ ⑤ $\dfrac{r^2}{2}(\mathrm{cm}^2)$

해설



$a^2+b^2=(2r)^2$

산술기하평균의 관계에 의해

$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$

$4r^2 \geq 2(ab)$

$ab \leq 2r^2$,

(직사각형 넓이의 최댓값) $=2r^2$

45. 제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b에 대하여 $a+2b$가 최대일 때, a와 b사이의 관계는?

① $b=2a$　　② $a=2b$　　③ $a=b$

④ $a^2=b$　　⑤ $b^2=a$

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(a+2b)^2 \le (1^2+2^2)(a^2+b^2)$

$\therefore\ (a+2b)^2 \le 5c$

이 때, 등호는 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}$일 때 성립

$\therefore\ b=2a$