1. 점 $\mathrm{A}(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$　② $x+2y-8=0$　③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$　⑤ $x-2y=0$

해설

$\mathrm{P}\ (a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1\ :\ 3$ 내분점을 $\mathrm{Q}\ (x,\ y)$라 하면

$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\dfrac{a+18}{1+3},\dfrac{b+6}{1+3}\right)$

$x=\dfrac{a+18}{1+3}$, $y=\dfrac{b+6}{1+3}$

$a=4x-18$, $b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

2. 두 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 2)$

해설

직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점을 P$(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
$12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5\cdots\cdots$ ①
또, 점 P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1\cdots\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
A$(-2,1)$, B$(4,-3)$의 수직이등분선 위에 있다.
$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기는 $\dfrac{1+3}{-2-4}=-\dfrac{2}{3}$이므로
수직이등분선의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$, A$(-2,1)$, B$(4,-3)$ 의 중점 $(1,-1)$를 지나므로
$\therefore\ y+1=\dfrac{3}{2}(x-1)\ \cdots$①
구하는 점 P는 $y=2x-1$과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x=-3,y=-7$
$\therefore\ P(-3,\ -7)$

3. 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $y=3x+2(-1 \le x \le 2)$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b, a-b)$가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로
$b=3a+2(\text{단}, -1 \le a \le 2) \cdots$ ㉠
이 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b, a-b)$에서
$a+b=X,\ a-b=Y$로 놓고
a, b를 X, Y로 나타내면
$a=\dfrac{X+Y}{2},\ b=\dfrac{X-Y}{2}$
이것을 ㉠에 대입하면
$\dfrac{X-Y}{2}=\dfrac{3X+3Y}{2}+2$
$\therefore X+2Y+2=0$
한편, $X=a+b=a+(3a+2)=4a+2$이고
$-1 \le a \le 2$이므로 $-2 \le 4a+2 \le 10$
$\therefore -2 \le X \le 10$
따라서 점 $\mathrm{Q}(x, y)$는
직선 $x+2y+2=0$ (단, $-2 \le x \le 10$) 위를 움직인다.
그런데 $x=-2$일 때, $y=0$
$x=10$일 때, $y=-6$이므로
구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2,0), (10,-6)$을 이은 선분의 길이와 같다.
$\therefore \sqrt{(10+2)^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

4. 두 점 $A(1,\ 0)$, $B(4,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π　② $2\sqrt{3}\pi$　③ 4π　④ $2\sqrt{5}\pi$　⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\dfrac{2\times4+1\times1}{2+1},\ 0\right)=(3,\ 0)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(\dfrac{2\times4-1\times1}{2-1},\ 0\right)=(7,\ 0)$

$\therefore$ 중심은 $(5,\ 0)$ 이고, 반지름은 2 인 원

$\Rightarrow$ 둘레의 길이는 $2\times2\times\pi=4\pi$

5. 정점 A(1, 4)와 직선 $x+2y-1=0$ 위의 동점 P를 연결하는 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 자취의 방정식을 구하면?

① $x+2y-5=0$ ② $2x+3y-10=0$
③ $3x+6y-11=0$ ④ $3x-6y-10=0$
⑤ $2x+5y-9=0$

해설

P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-1=0 \cdots\cdots$ ①
$\overline{\mathrm{AP}}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{2a+1}{3},\ y=\dfrac{2b+4}{3}$

$\therefore\ a=\dfrac{3x-1}{2},\ b=\dfrac{3y-4}{2} \cdots\cdots$ ②

②을 ①에 대입하면 $\dfrac{3x-1}{2}+2\times\dfrac{3y-4}{2}-1=0$

$\therefore\ 3x+6y-11=0$

6. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각을이등분하는 직선이 점 $(a,-1)$ 를 지날 때, a 의 값의 합은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $\mathrm{P}(a,\ -1)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 까지의 거리가 같으므로

$d=\dfrac{|2a+1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|a-2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$|2a|=|a-3|$

$\therefore\ 2a=a-3$ 또는 $2a=-(a-3)$ 이므로

$a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

7. 이차곡선 $x^2+y^2+ax+by+7=0$ 이 반지름 1 인 원을 표시한다. 이 원의 중심 $a,\ b$ 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}\pi$　② $2\sqrt{2}\pi$　③ $3\sqrt{2}\pi$　④ $4\sqrt{2}\pi$　⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-28}{4}$

$\frac{a^2+b^2-28}{4}=1$ 에서

$a^2+b^2=32\cdots$ ㉠

중심 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$ 에서

$x=-\frac{a}{2},\ y=-\frac{b}{2}$ 이므로

$a=-2x,\ b=-2y$ 를 ㉠에 대입하면

$4x^2+4y^2=32 \quad \therefore\ x^2+y^2=8$

$\therefore\ 2\pi r=4\sqrt{2}\pi$

8. 두 점 $A(-3,0)$, $B(3,0)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 20$ 을 만족시키는 점 P 의 자취를 구하면?

① $x = 1$ ② $x = 2$ ③ $x^2 + y^2 = 1$
④ $x^2 + y^2 = 2$ ⑤ $x^2 + y^2 = 4$

해설

점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면
$(x+3)^3 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 20$
$2x^2 + 2y^2 = 2$
$\therefore x^2 + y^2 = 1$

9. 점 A(4, 0)과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{4}$　⑤ π

해설

$x^2+y^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면
$A(4,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는
$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+4}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$
$\therefore\ \ a=2x-4,\ b=2y$
이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$가 성립한다.
$(2x-4)^2+(2y)^2=4, (x-2)^2+y^2=1$
따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2,0)$,
반지름의 길이가 1 인 원이므로
원이 넓이 S 는 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$