1. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다.
(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(나)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k ② 0, $k+1$ ③ 0, $k-1$
④ 1, k ⑤ 1, $k+1$

해설

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.
(i) $P(\boxed{1})$이 참이다.
(ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{k+1})$도 참이다.

2. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
$\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
$= 3(7m' + 4^k)$
$\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

해설

$7^{k+1} - 4^{k+1} = 3(7m' + 4^k)$
로 변형하였으므로
$7^n - 4^n$은 3으로 나누어 떨어진다는
것을 $n = k + 1$일 때 증명한 것이다.
∴ ①

3. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변)이므로 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$
> 위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
> $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$
> 즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> 따라서, (i),(ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)},\ \frac{2k+1}{2k+3}$　　② $\frac{1}{2k(2k+2)},\ \frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+1}{2k+3}$　　④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)},\ \frac{k+3}{2k+3}$

해설

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$을 더하면

$$\begin{aligned}(\text{우변})&=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}\end{aligned}$$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$ ①이다.
> ①의 양변에 $2k+3$를 더하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
> 이므로 [㉠]일 때에도 성립한다.
> 따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$ ② $n=-k+2$ ③ $n=k+1$
④ $n=k+2$ ⑤ $n=2k+1$

해설

㉠의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$
$=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

5. 양의 정수 n에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n\left\{p(n) - 1\right\}$ $(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$일 때 (좌변)$= p(1) = 1$
> (우변)$= 2\left\{p(2) - 1\right\} = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$이므로 성립한다.
> (ii) $n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k\left\{p(k) - 1\right\}$
> $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (㉠)p(k) - k$
> $= (㉠)\left\{p(k+1) - ㉡\right\} - k$
> $= (k+1)\left\{p(k+1) - 1\right\}$ 이므로 $n = k+1$일 때 성립한다.
> 따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k,\ \frac{1}{k}$　② $k,\ \frac{1}{k+1}$　③ $k+1,\ \frac{1}{k}$
④ $k+1,\ \frac{1}{k+1}$　⑤ $k+2,\ \frac{1}{k}$

해설

$n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots p(k-1) = k\left\{p(k) - 1\right\}$이고,
$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(k) = k\left\{p(k) - 1\right\} + p(k)$
$= (k+1)p(k) - k$
$= (k+1)\left\{p(k+1) - \frac{1}{k+1}\right\} - k$
$= (k+1)\left\{p(k+1) - 1\right\}$
$\therefore$ ㉠ : $k+1$, ㉡ : $\frac{1}{k+1}$

6. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$
② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$
③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$
④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$
⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

해설

(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{2k^2+7k+6})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{2k+3})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

7. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $2k+1$　② $2k-1$　③ $2k$
④ $k+1$　⑤ $k-1$

해설

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

8. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$
$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$ ② $2k,\ k+1$
③ $2k,\ (k+1)^2$ ④ $2k+1,\ k+1$
⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

해설

(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k+1}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$
$=k^2+\boxed{2k+1}=\boxed{(k+1)^2}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가) $=2k+1$, (나) $=(k+1)^2$

9. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i)$n=1$일 때,
> (좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii)$n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
> 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{\text{(가)}}$
> $=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{\text{(가)}}=\frac{1}{6}k(k+1)\left\{k(2k+1)+6(k+1)\right\}$
> $=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
> 따라서, $n=\boxed{\text{(나)}}$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $k,\ k^2$ ② $k,\ (k+1)^2$

③ $k+1,\ k$ ④ $(k+1)^2,\ k$

⑤ $(k+1)^2,\ k+1$

해설

(ii)$n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots++k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

양변에 $n=\boxed{(k+1)^2}$를 더하면

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(k+1)^2}$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(k+1)^2}=\frac{1}{6}k(k+1)\left\{k(2k+1)+6(k+1)\right\}$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

따라서, $n=\boxed{k+1}$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

10. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
$= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

11. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을
수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$, (우변)$=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{(가)}$
$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{(가)}$
$=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$
② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$
③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$
④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$
⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$
양변에 $\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$를 더하면
$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}}$
$=\boxed{\frac{k+1}{2k+3}}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

12. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> **증명**
>
> (i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
>
> (ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
>
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
>
> 양변에 (㉠)^3 을 더하면
>
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
>
> $\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$
>
> $= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4}$
>
> $= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2$
>
> 따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
>
> (i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

> **해설**
>
> (i) $n=1$일 때, $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제가 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,
>
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$
>
> 양변에 (㉠)^3 을 더하면
>
> $\sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (m+1)^3$
>
> $\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$
>
> $= \left\{\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right\}^2$
>
> 따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 명제가 성립한다.
>
> (i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.
>
> 즉, $f(m)=m+1,\ g(m)=m+2$
>
> $\therefore f(5)=5+1=6,\ g(6)=6+2=8$
>
> $\therefore f(5)+g(6)=6+8=14$

13. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n$
$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$일 때, (좌변)= (우변)=2
(ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$
$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡
㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$
$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$
$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$
따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

(i) $n = 1$일 때, $1 \cdot 2^1 = 2$
(ii) $n = k$일 때 성립한다고 가정하고, $n = k+1$을 대입하면
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k$
$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡
㉡의 양변에 $\boxed{2(2k+1)}$을 곱하면
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\boxed{(2k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1)\boxed{2(2k+1)}$
$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(2k+2)(2k+1)$
$= (2k+2)(2k+1)(2k)(2k-1) \cdots (k+2)$
따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(i) ,(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.
즉, $f(k) = 2(2k+1)$, $g(k) = (2k+1)2^{k+1}$
$\therefore \dfrac{g(k)}{f(k)} = 2^k$
$\therefore \dfrac{g(10)}{f(10)} = 1024$

14. 다음은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$
② $n = 1,\ (k+1)^2$
③ $n = 5,\ (k-1)^2$
④ $n = 5,\ k^2$
⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

해설

(i) $n = 5$일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$2^k > k^2$
양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
$k \geq 5$일 때, $2k^2 - (k+1)^2 > 0$이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
따라서 $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ ㉠ $n = 5$, ㉡ $(k+1)^2$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=2^{1-1}(1+3)=4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $=2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
양변에 4를 곱하면
$4^{k+1} \le \boxed{2^{k+1}}(1+3^k)$
$=2^k(2+2\cdot 3^k)$
$=2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{2^k(1+3^{k+1})}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

16. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$이 참임을 증명한다.
k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=2,\quad b=2$
$\therefore a+b=4$

17. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

자연수는 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열을 이루므로 $p(1)$이 참임을 증명한다.
k가 자연수이면 그 다음 자연수는 $k+1$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+1)$이 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=1,\ \ b=1$
$\therefore a+b=2$

18. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 홀수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

홀수는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(1)$이 참임을 증명한다.
k가 홀수이면 그 다음 홀수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=1, \quad b=2$
$\therefore a+b=3$

19. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$일 때, $2^{4+2}+3^{1+2}=91=13\cdot 7$로 13의 배수이다

(ii) $n-k$(k는 자연수) 일 때 성립한다고 가정하면

$2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$(m은 자연수)

$2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}=$ ㉠ $\cdot 2^{4k+2}+$ ㉡ $\cdot 3^{k+2}$

$=$ ㉠ $\cdot 13m+$ ㉢ $\cdot 3^{k+2}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 $2^{4n+2}+3^{k+2}$은 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$의13의 배수이다.

위의 증명에서 ㉠,㉡,㉢에 알맞은 수들의 합은?

① 1 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

$2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$일 때
$2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}$도 13의 배수가
되는지 확인하는 과정이다.

$2^4\cdot 2^{4k+2}+3\cdot 3^{k+2}$

$=2^4\cdot(13m-3^{k+2})+3\cdot 3^{k+2}$

$=2^4\cdot 13m-16\cdot 3^{k+2}+3\cdot 3^{k+2}$

$=2^4\cdot 13m+(-13)\cdot 3^{k+2}$

$\therefore$ ㉠$=16$, ㉡$=3$, ㉢$=-13$

$\therefore$ ㉠$+$ ㉡$+$ ㉢$=6$

20. 다음은 모든 자연수 N에 대하여
$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=1^3=1$, (우변)$=1^2=1$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$
> 양변에 $\boxed{(가)}$ 를 더하면
> $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{(가)}$
> $=(1+2+3+\cdots+k)^2+\boxed{(가)}$
> $=\boxed{(나)}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① (가) : $k+1$, (나) : k^3
② (가) : k^3, (나) : $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$
③ (가) : k^3, (나) : $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$
④ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$
⑤ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$
양변에 $\boxed{(k+1)^3}$를 더하면
$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{(가)}$
$=(1+2+3+\cdots+k)^2+\boxed{(k+1)^3}$
$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3$
$=(k+1)^2\left\{\left(\frac{k+2}{2}\right)^2\right\}=\boxed{\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

21. $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 $\square$안에 공통으로 들어 갈 것은?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}$$

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,
(우변)$=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.
(ii) $n=k(k\ge 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\frac{1}{\square}\right)$을 곱하면

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$
$=\frac{k+1}{2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k+2}{2}=\frac{(\square)+1}{2}$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다. (i), (ii)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k+1$

해설

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,
(우변)$=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$을 곱하면

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$
$=\frac{k+1}{2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)+1}{2}$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

22. 모든 자연수 n에 대하여 $6^n - 5n - 1$은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\boxed{}$안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

> $6^n - 5n - 1$은 25의 배수이다. $\cdots\cdots$ ㉠
>
> (i) $n = 1$일 때, $6 - 5 - 1 = 0$이므로 $\boxed{}$의 배수이다.
> 따라서 $n = 1$일 때, ㉠이 성립한다.
>
> (ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$이 25의 배수이면
> $6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \boxed{}(6^k - 5k - 1) + 25k$는 $\boxed{}$의 배수이므로 $n = k + 1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
>
> 따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

▶ 답：

▷ 정답： 56

해설

$25 + 6 + 25 = 56$

23. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $\dfrac{5^n+3^n}{2} \geq 4^n$이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=\dfrac{5+3}{2}=4$, (우변)$=4^1=1$
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$\dfrac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
$4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$
이므로
$\dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2}$
$= \dfrac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$
따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① 4^k, 5^k-3^k　② 4^{k+1}, 5^k-3^k
③ 4^k, 5^k+3^k　④ 4^{k+1}, 5^k+3^k
⑤ 4^{k+1}, $5^{k+1}-3^{k+1}$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$\dfrac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{4^k}$
위의 식의 양변에 4를 곱하면
$4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{4^k}$
이므로
$\dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \dfrac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \dfrac{5^k+3^k}{2}$
$= \dfrac{\boxed{5^k-3^k}}{2} \geq 0$
따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.

24. 다음은 $h > 0$일 때, $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{\quad(가)\quad}$이므로 ㉠이 성립한다.
> ii) $n = k(k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
> $(1+h)^k = 1+kh$
> $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\quad(가)\quad})(1+h) > 1+(k+1)h$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1+2h,\ 1+kh$　② $1+2h,\ 1+(k+1)h$
③ $1+h^2,\ 1+kh$　④ $1+h^2,\ 1+(k+1)h$
⑤ $2h+h^2,\ 1+kh$

해설

(i) $n = 2$일 때, $(1+h)^2 = 1+2h+h^2 > \boxed{1+2h}$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$(1+h)^k = 1+kh$
$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{1+kh})(1+h) > 1+(k+1)h$
따라서, $n = k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

25. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, $4>2+1$이므로 성립한다.
> (ii) $n=k(k \geq 2)$일 때,
> $2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1 \cdots$ ㉠이 성립한다고 가정하자. ㉠의 양변에 2를 곱하면
> $2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$
> 이때, $2(k^2+k+1) - \boxed{(나)} = k^2-k-1$
> $k \geq 2$일 때, $k^2-k-1 \boxed{(다)} 0$이므로
> $2^{k+2} > 2(k^2+k+1) > \boxed{(나)}$
> $\therefore\ 2^{k+2} > \boxed{(나)}$
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
> $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$

② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$

③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $<$

⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

해설

(ii) $n=k(k \geq 2)$일 때,
$2^{k+1} > \boxed{k(k+1)} + 1 \cdots$ ㉠이 성립한다고 가정하자. ㉠의 양변에 2를 곱하면
$2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$
이때, $2(k^2+k+1) - \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}} = k^2-k-1$
$k \geq 2$일 때, $k^2-k-1 \boxed{>} 0$이므로
$2^{k+2} > 2(k^2+k+1) > \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}}$
$\therefore\ 2^{k+2} > \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}}$
따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

26. 다음은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=2$일 때,
> (좌변)$=\dfrac{1}{(가)}+\dfrac{1}{(나)}=\dfrac{7}{12}>\dfrac{13}{24}$
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}$
> $\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}$
> 양변에 $\dfrac{1}{2k+(다)}+\dfrac{1}{2k+(라)}$을 더하면
> $\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+(다)}+\dfrac{1}{2k+(라)}$
> $>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{2k+(다)}+\dfrac{1}{2k+(라)}$
> $=\dfrac{13}{24}-\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{2k+(다)}-\dfrac{1}{2k+(라)}\right)$
> $=\dfrac{13}{24}+\dfrac{1}{2(k+1)(2k+(다))}>\dfrac{13}{24}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?

① 7 ② 10 ③ 13 ④ 16 ⑤ 19

해설

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{\boxed{3}}+\dfrac{1}{\boxed{4}}=\dfrac{7}{12}>\dfrac{13}{24}$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.
(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}$

$\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}$

양변에 $\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}+\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}$을 더하면

$\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{2k}+\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}+\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}$

$>\dfrac{13}{24}-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}+\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}$

$=\dfrac{13}{24}-\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{2k+\boxed{1}}-\dfrac{1}{2k+\boxed{2}}\right)$

$=\dfrac{13}{24}+\dfrac{1}{2(k+1)(2k+\boxed{1})}>\dfrac{13}{24}$

따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 성립한다.
$\therefore$ (가)+(나)+(다)+(라)$=3+4+1+2=10$