1. 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

(i) $P(\boxed{(가)})$이 참이다. (ii) $P(k)$가 참이면 $P(\boxed{(나)})$도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $0,\ k$ ② $0,\ k+1$ ③ $0,\ k-1$
④ $1,\ k$ ⑤ $1,\ k+1$

2. 다음은 자연수 n에 대한 명제 P(n)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 P(n)으로 알맞은 것은?

> **증명**
>
> (ii) $n = k$일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면
> $\boxed{}$이라 놓을 수 있다.
> $7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$
> $= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$
> $= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$
> $= 3(7m' + 4^k)$
> $\cdots\cdots$

① $7^n - 4^n$은 3으로 나누어떨어진다.

② $7^n - 4^n$은 7으로 나누어떨어진다.

③ $7^n - 4^n$은 n으로 나누어떨어진다.

④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 7로 나누어떨어진다.

⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$은 n으로 나누어떨어진다.

3. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{3}=$ (우변) 이므로 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k+1}$$
> 위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+[㉠]=[㉡]$$
> 즉, $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
> 따라서, (i),(ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+1}{2k+3}$
② $\frac{1}{2k(2k+2)}$, $\frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+1}{2k+3}$
④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, $\frac{k+3}{2k+3}$

4. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$ ①이다.
> ①의 양변에 $2k+3$를 더하면
> $3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
> 이므로 [㉠]일 때에도 성립한다.
> 따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$　② $n=-k+2$　③ $n=k+1$
④ $n=k+2$　⑤ $n=2k+1$

5. 양의 정수 n에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n\{p(n) - 1\}$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$일 때 (좌변)$= p(1) = 1$
> (우변)$= 2\{p(2) - 1\} = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$이므로 성립한다.
> (ii) $n = k$ $(k \geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k\{p(k) - 1\}$
> $p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = ($㉠$)p(k) - k$
> $= ($㉠$)\{p(k+1) - $㉡$\} - k$
> $= (k+1)\{p(k+1) - 1\}$이므로 $n = k+1$일 때 성립한다.
> 따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k,\ \frac{1}{k}$ ② $k,\ \frac{1}{k+1}$ ③ $k+1,\ \frac{1}{k}$
④ $k+1,\ \frac{1}{k+1}$ ⑤ $k+2,\ \frac{1}{k}$

6. 다음은 n이 자연수일 때, $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
위의 식의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$
$=\frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$
따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii) 에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2+7k+4,\ 2k+2$
② $2k^2+7k+5,\ 2k+2$
③ $2k^2+7k+5,\ 2k+3$
④ $2k^2+7k+6,\ 2k+2$
⑤ $2k^2+7k+6,\ 2k+3$

7. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{}$을 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{}=(k+1)^2$이므로
$n=k+1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $2k+1$　② $2k-1$　③ $2k$
④ $k+1$　⑤ $k-1$

8. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \cdots$ ㉠이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1^2=1$이므로 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\boxed{(가)}$
$=k^2+\boxed{(가)}=\boxed{(나)}$
따라서, $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 ㉠은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k-1,\ (k+1)^2$　② $2k,\ k+1$
③ $2k,\ (k+1)^2$　④ $2k+1,\ k+1$
⑤ $2k+1,\ (k+1)^2$

9. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변) $=1^2=1$, (우변) $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
> 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(가)}$
> $=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(가)}=\frac{1}{6}k(k+1)\left\{k(2k+1)+6(k+1)\right\}$
> $=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
> 따라서, $n=\boxed{(나)}$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $k,\ k^2$　② $k,\ (k+1)^2$

③ $k+1,\ k$　④ $(k+1)^2,\ k$

⑤ $(k+1)^2,\ k+1$

10. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$ 이므로 주어진 등식이 성립한다. (ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$ $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$ 이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$ $= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$ $= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$ 따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다. (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

11. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$ 이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
>
> (좌변)$=\dfrac{1}{1\cdot 3}=\dfrac{1}{3}$, (우변)$=\dfrac{1}{2\cdot 1+1}=\dfrac{1}{3}$
>
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
>
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
>
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$
>
> 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하면
>
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\boxed{\text{(가)}}$$
>
> $$=\frac{k}{2k+1}+\boxed{\text{(가)}}$$
>
> $$=\boxed{\text{(나)}}$$
>
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\dfrac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\dfrac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\dfrac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\dfrac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\dfrac{k+1}{2k+3}$

12. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n=1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$

양변에 (㉠)^3 을 더하면

$\sum_{k=1}^{m} k^3 + (\boxed{㉠})^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2 + (\boxed{㉠})^3 \\ &= \frac{(m+1)^2(\boxed{㉡})^2}{4} \\ &= \left\{\frac{(m+1)(\boxed{㉡})}{2}\right\}^2 \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㉠에 들어갈 식을 $f(m)$, ㉡에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5)+g(6)$ 의 값을 구하여라.

답: ________

13. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \;\cdots\cdot (2n-1) \cdot 2^n$

$= (2n)(2n-1)\cdots(n+2)(n+1) \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$=$ (우변)$=2$

(ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \;\cdots\cdot (2k-1) \cdot 2^k$

$= (2k)(2k-1)\cdots(k+2)(k+1) \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \;\cdots\cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$

$= (2k)(2k-1)\cdots(k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$

$= (2k+2)(2k+1)(2k)\cdots(k+2)$

따라서 $n = k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

14. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

> (i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.
> (ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $2^k > k^2$
> 양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$
> $k \geq 5$ 일 때, $2k^2 -$ ㉡ > 0 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$
> 따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1,\ k^2$　　② $n = 1,\ (k+1)^2$

③ $n = 5,\ (k-1)^2$　　④ $n = 5,\ k^2$

⑤ $n = 5,\ (k+1)^2$

15. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $4^n \le 2^{n-1}(1+3^n)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 4$, (우변)$= 2^{1-1}(1+3) = 4$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $4^k \le 2^{k-1}(1+3^k)$
> 양변에 4를 곱하면
> $4^{k+1} \le \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$
> $= 2^k(2+2\cdot 3^k)$
> $= 2^k(1+1+2\cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2\cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n = k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1}, (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

16. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ________

17. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다.
(ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ________

18. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 홀수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

답: ________

19. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$은 13의 배수임을 증명한 것이다.

> 증명
>
> (i) $n=1$일 때, $2^{4+2}+3^{1+2}=91=13\cdot 7$로 13의 배수이다
>
> (ii) $n-k$(k는 자연수) 일 때 성립한다고 가정하면
>
> $2^{4k+2}+3^{k+2}=13m$(m은 자연수)
>
> $2^{4(k+1)+2}+3^{(k+1)+2}=$ ㉠ $\cdot 2^{4k+2}+$ ㉡ $\cdot 3^{k+2}$
>
> $=$ ㉠ $\cdot 13m+$ ㉢ $\cdot 3^{k+2}$
>
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 $2^{4n+2}+3^{k+2}$은 13의 배수이다.
>
> (i), (ii) 에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{4n+2}+3^{n+2}$ 의13 의 배수이다.

위의 증명에서 ㉠,㉡,㉢에 알맞은 수들의 합은?

① 1　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 8

20. 다음은 모든 자연수 N에 대하여
$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$=1^3=1$, (우변)$=1^2=1$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$
> 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하면
> $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{\text{(가)}}$
> $=(1+2+3+\cdots+k)^2+\boxed{\text{(가)}}$
> $=\boxed{\text{(나)}}$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k+1$, (나) : k^3

② (가) : k^3, (나) : $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

③ (가) : k^3, (나) : $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

④ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$

⑤ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$

21. $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 $\square$안에 공통으로 들어 갈 것은?

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}$$

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

(우변)$=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k+1}{2}$이므로 양변에 $\left(1+\frac{1}{\square}\right)$을 곱하면

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{k+1}{2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{k+2}{2}=\frac{(\square)+1}{2}$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 식이 성립한다. (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

답: ________

22. 모든 자연수 n에 대하여 $6^n - 5n - 1$은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\boxed{}$안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

> $6^n - 5n - 1$은 25의 배수이다. ······㉠
>
> (i) $n = 1$일 때, $6 - 5 - 1 = 0$이므로 $\boxed{}$의 배수이다.
> 따라서 $n = 1$일 때, ㉠이 성립한다.
> (ii) $n = k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$이 25의 배수이면
> $6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \boxed{}(6^k - 5k - 1) + 25k$는 $\boxed{}$의 배수이므로 $n = k + 1$일 때에도 ㉠이 성립한다.
> 따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답: ________

23. 다음은 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $\frac{5^n+3^n}{2} \geq 4^n$이 성립함을 증명하는 과정이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변)$= \frac{5+3}{2} = 4$, (우변)$= 4^1 = 1$
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{5^k+3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$
> 위의 식의 양변에 4를 곱하면
> $4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$
> 이므로
> $\frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1}+3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k+3^k}{2}$
> $= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $4^k,\ 5^k-3^k$
② $4^{k+1},\ 5^k-3^k$
③ $4^k,\ 5^k+3^k$
④ $4^{k+1},\ 5^k+3^k$
⑤ $4^{k+1},\ 5^{k+1}-3^{k+1}$

24. 다음은 $h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots$ ㉠ 이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > \boxed{\text{(가)}}$ 이므로
> ㉠이 성립한다.
> ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
> $(1+h)^k = 1 + kh$
> $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\text{(가)}})(1+h) > 1+(k+1)h$
> 따라서, $n = k+1$ 일 때에도 ㉠은 성립한다.
> (i), (ii) 에 의하여 ㉠은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1 + 2h,\ 1 + kh$ ② $1 + 2h,\ 1 + (k+1)h$

③ $1 + h^2,\ 1 + kh$ ④ $1 + h^2,\ 1 + (k+1)h$

⑤ $2h + h^2,\ 1 + kh$

25. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립함을 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, $4>2+1$이므로 성립한다.
> (ii) $n=k(k \geq 2)$일 때,
> $2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1 \cdots$ ㉠이 성립한다고 가정하자. ㉠의 양변에 2를 곱하면
> $2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$
> 이때, $2(k^2+k+1) - \boxed{(나)} = k^2-k-1$
> $k \geq 2$일 때, $k^2-k-1 \boxed{(다)} 0$이므로
> $2^{k+2} > 2(k^2+k+1) > \boxed{(나)}$
> $\therefore\ 2^{k+2} > \boxed{(나)}$
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
> $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$

② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$

③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $<$

⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

26. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때,

(좌변)$= \frac{1}{\text{(가)}} + \frac{1}{\text{(나)}} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{2k + \text{(다)}} + \frac{1}{2k + \text{(라)}}$ 을 더하면

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k + \text{(다)}} + \frac{1}{2k + \text{(라)}}$$

$$> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k + \text{(다)}} + \frac{1}{2k + \text{(라)}}$$

$$= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k + \text{(다)}} - \frac{1}{2k + \text{(라)}}\right)$$

$$= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k + \text{(다)})} > \frac{13}{24}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라) 의 값은?

① 7　② 10　③ 13　④ 16　⑤ 19