

1. 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 참이 되기 위해서는 다음 두 조건을 만족해야 한다.

- (i) $P(0)$ 이 참이다.
(ii) $P(k)$ 가 참이면 $P(k+1)$ 도 참이다.

이때, (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① 0, k

② 0, $k+1$

③ 0, $k-1$

④ 1, k

⑤ 1, $k+1$

2. 다음은 자연수 n 에 대한 명제 $P(n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 일부이다. 다음 중 명제 $P(n)$ 으로 알맞은 것은?

증명

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 명제가 성립한다고 가정하면

이라 놓을 수 있다.

$$7^{k+1} - 4^{k+1} = 7 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$$

$$= 7(7^k - 4^k) + 3 \cdot 4^k$$

$$= 7 \cdot m + 3 \cdot 4^k$$

$$= 3(7m' + 4^k)$$

.....

- ① $7^n - 4^n$ 은 3으로 나누어떨어진다.
- ② $7^n - 4^n$ 은 7으로 나누어떨어진다.
- ③ $7^n - 4^n$ 은 n 으로 나누어떨어진다.
- ④ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 7로 나누어떨어진다.
- ⑤ $7^{n+1} - 4^{n+1}$ 은 n 으로 나누어떨어진다.

3. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{3} =$ (우변) 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}$$

위의 식의 양변에 $\textcircled{7}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + [\textcircled{7}] = [\textcircled{8}]$$

즉, $n = k + 1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

① $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+1}{2k+3}$

② $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+2}{2k+3}$

③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+1}{2k+3}$

④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+2}{2k+3}$

⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+3}{2k+3}$

4. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + 2n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변) = 3, (우변) = $1^2 + 2 \cdot 1 = 3$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 식이 성립한다고 가정하면

$3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = k^2 + 2k \cdots \cdots$ ①이다.

①의 양변에 $2k + 3$ 를 더하면

$$3 + 5 + \cdots + (2k + 1) + (2k + 3) = k^2 + 2k + (2k + 3) = (k + 1)^2 + 2(k + 1)$$

이므로 [㉠]일 때에도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = -k + 1$

② $n = -k + 2$

③ $n = k + 1$

④ $n = k + 2$

⑤ $n = 2k + 1$

5. 양의 정수 n 에 대하여 $p(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 이라 할 때 다음은 $p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(n-1) = n \{p(n) - 1\}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때 (좌변) $= p(1) = 1$

(우변) $= 2 \{p(2) - 1\} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k$ ($k \geq 2$) 일 때 성립한다고 가정하면 $p(1) + p(2) + \cdots + p(k-1) = k \{p(k) - 1\}$

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(k) = (\textcircled{\gamma})p(k) - k$$

$$= (\textcircled{\gamma}) \{p(k+1) - \textcircled{\text{L}}\} - k$$

$$= (k+1) \{p(k+1) - 1\} \text{ 이므로 } n = k+1 \text{ 일 때 성립한다.}$$

따라서 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 $\textcircled{\gamma}$, $\textcircled{\text{L}}$ 에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① $k, \frac{1}{k}$

② $k, \frac{1}{k+1}$

③ $k+1, \frac{1}{k}$

④ $k+1, \frac{1}{k+1}$

⑤ $k+2, \frac{1}{k}$

6. 다음은 n 이 자연수일 때, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1, (\text{우변}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

위의 식의 양변에 $(k+1)^2$ 을 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(\boxed{\text{(가)}})$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(\boxed{\text{(나)}})$$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $2k^2 + 7k + 4, 2k + 2$

② $2k^2 + 7k + 5, 2k + 2$

③ $2k^2 + 7k + 5, 2k + 3$

④ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 2$

⑤ $2k^2 + 7k + 6, 2k + 3$

7. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ 이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

이 식의 양변에 □을 더하면

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \square = (k + 1)^2$ 이므로

$n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $2k + 1$

② $2k - 1$

③ $2k$

④ $k + 1$

⑤ $k - 1$

8. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \cdots \textcircled{7}$ 이 성립함을 수학적으로 증명한 것이다.

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$

이 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= k^2 + \boxed{\text{(가)}} = \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{7}$ 은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 $\textcircled{7}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① $2k - 1, (k + 1)^2$

② $2k, k + 1$

③ $2k, (k + 1)^2$

④ $2k + 1, k + 1$

⑤ $2k + 1, (k + 1)^2$

9. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + \boxed{\text{(가)}} &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \boxed{\text{(가)}} = \frac{1}{6}k(k+1) \{k(2k+1) + 6(k+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

따라서, $n = \boxed{\text{(나)}}$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위

의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① k, k^2

② $k, (k+1)^2$

③ $k+1, k$

④ $(k+1)^2, k$

⑤ $(k+1)^2, k+1$

10. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ 가 성립함을
수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) $= 1 \cdot 2 = 2$, (우변) $= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$$

$$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$$

이 식의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 을 더하면

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \boxed{\text{(나)}} \cdot 2^{k+2} + 2$$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립
한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

11. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을
수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}, (\text{우변}) = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+1}$

② (가) : $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (나) : $\frac{k+2}{2k+1}$

③ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k}{2k+3}$

④ (가) : $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

⑤ (가) : $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}$, (나) : $\frac{k+1}{2k+3}$

12. 다음은 $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $1^3 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n = m$ 일 때 주어진 명제가 성립한다고 가정하면,

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2$$

양변에 $(\textcircled{7})^3$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^m k^3 + (\textcircled{7})^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{7})^3$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 + (\textcircled{7})^3 \\ &= \frac{(m+1)^2 (\textcircled{L})^2}{4} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{(m+1)(\textcircled{L})}{2} \right\}^2$$

따라서 $n = m + 1$ 일 때도 주어진 명제가 성립한다.

(i), (ii) 에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \text{ 이 성립한다.}$$

위의 증명 과정에서 $\textcircled{7}$ 에 들어갈 식을 $f(m)$, $\textcircled{L}$ 에 들어갈 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) + g(6)$ 의 값을 구하여라.



답:

13. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2n-1) \cdot 2^n$$

$$= (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \cdots \textcircled{\Gamma}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = (우변) = 2

(ii) $n = k$ 일 때 $\textcircled{\Gamma}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2k-1) \cdot 2^k$$

$$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdots \textcircled{\text{L}}$$

$\textcircled{\text{L}}$ 의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 곱하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2k-1) \cdot \boxed{\text{(나)}}$$

$$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{\text{(가)}}$$

$$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 $\textcircled{\Gamma}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $\textcircled{\Gamma}$ 이 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$ 라 할

때, $\frac{g(10)}{f(10)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{1024}$

② $\frac{1}{512}$

③ 512

④ 1024

⑤ 2048

14. 다음은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $2^n > n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

(i) ㉠일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 5)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면 $2^k > k^2$

양변에 2를 곱하면 $2^{k+1} > 2k^2$

$k \geq 5$ 일 때, $2k^2 - \text{㉡} > 0$ 이므로 $2^{k+1} > (k+1)^2$

따라서 $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $n = 1, k^2$

② $n = 1, (k+1)^2$

③ $n = 5, (k-1)^2$

④ $n = 5, k^2$

⑤ $n = 5, (k+1)^2$

15. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n \leq 2^{n-1}(1+3^n)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 4, (우변) = $2^{1-1}(1+3) = 4$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$4^k \leq 2^{k-1}(1+3^k)$$

양변에 4를 곱하면

$$4^{k+1} \leq \boxed{\text{(가)}}(1+3^k)$$

$$= 2^k(2+2 \cdot 3^k)$$

$$= 2^k(1+1+2 \cdot 3^k) < 2^k(1+3^k+2 \cdot 3^k) = \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^{k-1})$

② (가) : 2^k , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

③ (가) : 2^k , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

④ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^{k-1}(1+3^k)$

⑤ (가) : 2^{k+1} , (나) : $2^k(1+3^{k+1})$

16. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 짝수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$ 가 참이다.

(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k+b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.



답: _____

17. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$ 가 참이다.

(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k+b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.



답: _____

18. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 있다. 명제 $p(n)$ 이 모든 홀수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$ 가 참이다.

(ii) $p(k)$ 가 참이라 가정하면 $p(k+b)$ 도 참이다.

이때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.



답:

19. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 은 13의 배수임을 증명한 것이다.

증명

(i) $n = 1$ 일 때, $2^{4+2} + 3^{1+2} = 91 = 13 \cdot 7$ 로 13의 배수이다

(ii) $n = k$ (k 는 자연수) 일 때 성립한다고 가정하면

$$2^{4k+2} + 3^{k+2} = 13m \quad (m \text{은 자연수})$$

$$2^{4(k+1)+2} + 3^{(k+1)+2} = \textcircled{\text{㉠}} \cdot 2^{4k+2} + \textcircled{\text{㉡}} \cdot 3^{k+2}$$

$$= \textcircled{\text{㉢}} \cdot 13m + \textcircled{\text{㉣}} \cdot 3^{k+2}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 은 13의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ 의 13의 배수이다.

위

의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉣에 알맞은 수들의 합은?

① 1

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 8

20. 다음은 모든 자연수 N 에 대하여
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ 이 성립함을 수학적
 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변) $= 1^3 = 1$, (우변) $= 1^2 = 1$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2$$

양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + \boxed{\text{(가)}} =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + k)^2 + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \boxed{\text{(나)}}$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립
 한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k + 1$, (나) : k^3

② (가) : k^3 , (나) : $\left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2$

③ (가) : k^3 , (나) : $\left\{ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\}^2$

④ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2$

⑤ (가) : $(k+1)^3$, (나) : $\left\{ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\}^2$

21. $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 다음 $\square$ 안에 공통으로 들어 갈 것은?

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$$

(i) $n = 2$ 일 때, (좌변) $= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

(우변) $= \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ 이므로 주어진 식이 성립한다.

(ii) $n = k (k \geq 2)$ 일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{k+1}{2} \text{ 이므로 양변}$$

에 $\left(1 + \frac{1}{\square}\right)$ 을 곱하면

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{k+1}{2} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k+2}{2} = \frac{(\square) + 1}{2}$$

따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 주어진 식이 성립한다. (i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.



답: _____

22. 모든 자연수 n 에 대하여 $6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한것이다. $\square$ 안에 들어간 수들의 합을 구하여라.

$6^n - 5n - 1$ 은 25의 배수이다. ㉠

(i) $n = 1$ 일 때, $6 - 5 - 1 = 0$ 이므로 $\square$ 의 배수이다.

따라서 $n = 1$ 일 때, ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하자. 즉, $6^k - 5k - 1$ 이 25의 배수이면

$6^{k+1} - 5(k+1) - 1 = \square(6^k - 5k - 1) + 25k$ 는 $\square$ 의 배수이므로 $n = k + 1$ 일 때에도 ㉠이 성립한다.

따라서 (i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.



답: _____

23. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\frac{5^n + 3^n}{2} \geq 4^n$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{5+3}{2} = 4, (\text{우변}) = 4^1 = 4$$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{5^k + 3^k}{2} \geq \boxed{\text{(가)}}$$

위의 식의 양변에 4를 곱하면

$$4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2} \geq 4 \cdot \boxed{\text{(가)}}$$

이므로

$$\frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4^{k+1} \geq \frac{5^{k+1} + 3^{k+1}}{2} - 4 \cdot \frac{5^k + 3^k}{2}$$

$$= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2} \geq 0$$

따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

① $4^k, 5^k - 3^k$

② $4^{k+1}, 5^k - 3^k$

③ $4^k, 5^k + 3^k$

④ $4^{k+1}, 5^k + 3^k$

⑤ $4^{k+1}, 5^{k+1} - 3^{k+1}$

24. 다음은 $h > 0$ 일 때, $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $(1+h)^n > 1+nh \cdots \textcircled{㉠}$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때, $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > \boxed{\text{가}}$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다.

ii) $n = k (k \geq 2)$ 일 때, $\textcircled{㉠}$ 이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k = 1 + kh$$

$(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) > (\boxed{\text{가}})(1+h) > 1+(k+1)h$ 따라서, $n = k + 1$ 일 때에도 $\textcircled{㉠}$ 은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $\textcircled{㉠}$ 은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① $1 + 2h, 1 + kh$

② $1 + 2h, 1 + (k+1)h$

③ $1 + h^2, 1 + kh$

④ $1 + h^2, 1 + (k+1)h$

⑤ $2h + h^2, 1 + kh$

25. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, $4 > 2 + 1$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k (k \geq 2)$ 일 때,

$2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1 \dots \textcircled{㉠}$ 이 성립한다고 가정하자. $\textcircled{㉠}$ 의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$$

이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{(나)} = k^2 - k - 1$

$k \geq 2$ 일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{(다)} 0$ 이므로

$$2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{(나)}$$

$$\therefore 2^{k+2} > \boxed{(나)}$$

따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$2^{n+1} > n(n+1) + 1 \text{이 성립한다.}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$

② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$

③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2) + 1\}$, (다) : $>$

④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2) + 1\}$, (다) : $<$

⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2) + 1\}$, (다) : $>$

26. 다음은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{(\text{가})} + \frac{1}{(\text{나})} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$$

이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{2k+(\text{다})} + \frac{1}{2k+(\text{라})}$ 을 더하면

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+(\text{다})} + \frac{1}{2k+(\text{라})}$$

$$> \frac{13}{24} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+(\text{다})} + \frac{1}{2k+(\text{라})}$$

$$= \frac{13}{24} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+(\text{다})} - \frac{1}{2k+(\text{라})} \right)$$

$$= \frac{13}{24} + \frac{1}{2(k+1)(2k+(\text{다}))} > \frac{13}{24}$$

따라서, $n = k+1$ 일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가)+(나)+(다)+(라)의 값은?