1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2$
$a_2 = a_1^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 2 = 9 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 3 = 49 - 3 = 46$

3. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, a_3+a_4의 값은?

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{1}{6},\ a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}\,(n=1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{5}{12}$　③ $\frac{7}{16}$　④ $\frac{5}{24}$　⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\dfrac{1}{a_1}=3,\ \dfrac{1}{a_2}=6$이므로

$\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 3=3n,\ a_n=\dfrac{1}{3n}$

$a_3=\dfrac{1}{9},\ a_4=\dfrac{1}{12}\quad\therefore\ a_3+a_4=\dfrac{7}{36}$

4. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29　　② 31　　③ 33　　④ 35　　⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 4 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 4 + 3n - 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

$\therefore a_{10} = 31$

5. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$

$\therefore\ a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$

6. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

7. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9\log_3 2$　　② $10\log_3 2$　　③ $11\log_3 2$

④ 9　　⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

8. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$

$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$

$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

9. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$a_1 = 4,\ a_2 = 6,\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$ ② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$ ③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$ ⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 4$이고 공비 r은 $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$이므로

$a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^9$

10. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ + & a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ \hline & a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ & \quad = -1 + \dfrac{(n-1)\cdot n}{2} \end{array}$$

$\therefore a_{10} = -1 + \dfrac{9 \cdot 10}{2}$

$= -1 + 45 = 44$

11. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},\ Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = 2,\ a_1 + a_2 = 3\ \therefore a_2 = 1$
$n = 2$일 때, $a_2 + a_3 = 6\ \therefore a_3 = 5$
$n = 3$일 때, $a_3 + a_4 = 9\ \therefore a_4 = 4$
$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$

12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$
$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-5)$
$= 2 + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$
$= n^2 - 6n + 7$
$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

13. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 수열 $\{a_n\}$ 이 정의될 때, a_n 을 10 으로 나눈 나머지가 0 이 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면
$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$
$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$
$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$

14. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 $m,\ n$에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4 = 72$일 때, a_5의 값은?

① $72\sqrt{3}$　　② $72\sqrt{6}$　　③ 144

④ $144\sqrt{3}$　　⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 2,\ n = 2$를 대입하면 $a_4 = 2a_2 a_2 = 72,\ a_2^2 = 36$

$\therefore\ a_2 = 6(\because\ a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 1,\ n = 1$을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6,\ a_1^2 = 3$

$\therefore\ a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_m a_n$에 $m = 4,\ n = 4$를 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

15. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1}$ $\therefore\ a_{10}\ =\ 110 \times$

$= 110 \times \frac{2}{n(n+1)}$

$\frac{2}{110} = 2$

16. 다음은 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

> $a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$ 이므로
> $a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① $1,\ \frac{1}{2}$ ② $1,\ 2$ ③ $2,\ \frac{1}{2}$ ④ $2,\ 2$ ⑤ $3,\ \frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

17. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

18. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -a_n + 2$와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

① $1 + (-1)^n$　② $2 + (-1)^n$　③ $3 + (-1)^n$
④ $4 + (-1)^n$　⑤ $5 + (-1)^n$

해설

$a_{n+1} = -a_n + 2$에서
$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$
이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1$, 공비가 -1인 등비수열이므로
$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$
$\therefore\ a_n = 1 + (-1)^n$

19. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, a_{100}의 값을 구하면?

① 2^{10} ② 2^{20} ③ 2^{40} ④ 2^{80} ⑤ 2^{100}

해설

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

$a_{n+1} - a_n = b_n$으로 놓으면 $b_{n+1} = 2b_n$

이때, 수열 $\{b_n\}$은 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이므로

$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$

$a_n = 2^n$

$\therefore\ a_{100} = 2^{100}$

20. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

21. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 가. $a_1 = 2$
> 나. a_{n+1}은 $3a_n$을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a_1 = 2,\ 3a_1 = 6$을 5로 나눈 나머지는 1이므로
$a_2 = 1$ 같은 방법으로 $a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 2$
$a_6 = 1,\ \cdots,\ a_{13} = a_1 = 2,\ a_{40} = a_4 = 4$이므로
$\therefore\ a_{13} + a_{40} = 2 + 4 = 6$

22. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n = \begin{cases} 2n+1 & (n\text{이 홀수}) \\ 2^{\frac{n}{2}} & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m}$의 값은?

(단, m은 자연수)

① $2m^2 + m + 2^m$
② $2m^2 + 2m + 2^{m+1}$
③ $2m^2 + m + 2^{m+1} - 2$
④ $2m^2 + m + 2^{m+1} - 1$
⑤ $2m^2 + m + 2^{m+1}$

해설

수열 $\{a_n\}$의 홀수 번째 항으로 이루어진 수열은 $3,\ 7,\ 11,\ 15, \cdots$ 이므로

공차가 4인 등차수열이고 처음 m개의 항의 합은

$\dfrac{m\{2\cdot 3 + (m-1)\cdot 4\}}{2} = 2m^2 + m$

수열 $\{a_n\}$의 짝수 번째 항으로 이루어진 수열은 $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4, \cdots$ 이므로 공비가 2인 등비수열이고 처음 m개의 항의 합은

$\dfrac{2(2^m - 1)}{2-1} = 2^{m+1} - 2$

$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m} = 2m^2 + m + 2^{m+1} - 2$

23. $a_1 = 4$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_{n+1} = 3S_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이 성립할 때, 제 5 항은?

① 678　　② 708　　③ 738　　④ 768　　⑤ 798

해설

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이고 $a_{n+1} = 3S_n$이므로

$S_{n+1} - S_n = 3S_n$

$\therefore S_{n+1} = 4S_n$

이때, $a_1 = S_1 = 4$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이다.

$\therefore S_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} (n \geq 2)$

$\therefore a_5 = 3 \cdot 4^4 = 768$

24. $a_1 = \frac{1}{3},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}\,(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의될 때, a_{15} 의 값은?

① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{29}$ ④ $\frac{1}{31}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ 에서 양변에 역수를 취하면 $\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ 이라 두면 $b_{n+1} = b_n + 2,\ b_1 = 3$

따라서, $b_n = 3 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 1$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2n+1}$

$\therefore\ a_{15} = \frac{1}{31}$

25. $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{66} a_n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

$a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$a_3 = \dfrac{2+1}{3} = 1$

$a_4 = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$a_5 = \dfrac{1+1}{1} = 2$

$a_6 = \dfrac{2+1}{1} = 3$

$a_7 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$\vdots$

$\therefore\ a_1 = a_6 = a_{11} = \cdots = 3$

$a_2 = a_7 = a_{12} = \cdots = 2$

$a_3 = a_8 = a_{13} = \cdots = 1$

$a_4 = a_9 = a_{14} = \cdots = 1$

$a_5 = a_{10} = a_{15} = \cdots = 2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{66} a_n = 13(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_1$

$= 13 \times 9 + 3 = 120$

26. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n}$ (단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = \dfrac{1}{63}$을 만족하는 n의 값은?

① 9　　② 8　　③ 7　　④ 6　　⑤ 5

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2 + a_n}$ 에서 양변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2}{a_n} + 1$

이때, $\dfrac{1}{a_n} = b_n$ 이라 하면 $b_1 = 1,\ b_{n+1} = 2b_n + 1$

그러면, $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$ 이므로

$b_n + 1 = (b_1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore\ b_n = 2^n - 1$

따라서 $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$ 이므로 $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1} = \dfrac{1}{63}$ 에서 $n = 6$ 이다.

27. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ ($n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항은?

① $\dfrac{1}{n}$ ② $\dfrac{1}{n+1}$ ③ $\dfrac{1}{n+2}$ ④ $\dfrac{2}{n}$ ⑤ $\dfrac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$의 양변을 역수로 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 1$, 즉 $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 1$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1} = 1$이고, 공차가 1인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \dfrac{1}{n}$

28. 어떤 세포의 집합은 1시간이 지나면 세포 2개는 죽고 나머지는 각각 2배로 분열한다고 한다. 처음 세포의 개수가 7개일 때, n시간 후의 세포의 개수를 a_n이라 하면, 다음 중 옳은 것은?

① $a_{n+1} = 2a_n - 7$ ② $a_{n+1} = 2(a_n - 7)$

③ $a_{n+1} = a_n - 2$ ④ $a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

⑤ $a_{n+1} = 2a_n - 2$

해설

$a_1 = 2 \times (7-2) = 10$
$a_2 = 2 \times (a_1 - 2)$
$a_3 = 2 \times (a_2 - 2)$
$a_4 = 2 \times (a_3 - 2)$
$\vdots$
$a_n = 2(a_{n-1} - 2)$
$\therefore\ a_{n+1} = 2(a_n - 2)$

29. 높이가 h인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n번째 날의 탑의 높이를 a_n이라 하면 $(n+1)$째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$의 합이므로

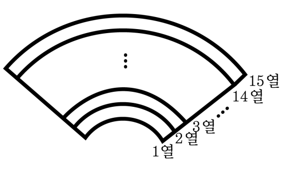
$a_1 = \frac{h}{2}$이고, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$

$\therefore a_n = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10} = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{9} = \frac{h}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

즉, $a = \frac{h}{3}$이므로 $\frac{a}{h} = \frac{1}{3}$

30. 다음 그림과 같이 관람석이 전체 15 열로 이루어진 극장이 있다. 제 n 열의 좌석 수를 a_n 이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = a_n + 1$ 을 만족한다. 제 1 열의 좌석 수가 30 일 때, 이 극장의 총 좌석 수는?



① 1100 ② 555 ③ 430 ④ 330 ⑤ 290

해설

$a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 1 인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot 1$

$= n + 29 (\because\ a_1 = 30)$

따라서, 총 좌석 수는

$\sum_{k=1}^{15}(k+29) = \frac{15\cdot 16}{2} + 29\cdot 15 = 555$

31. $a_4 = 1,\ a_8 = -11$ 이고, $\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - 1(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -17

해설

$\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - 1$ 에서

$\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - \log_2 2$

$= \log_2 \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_4 = a + 3d = 1,\ a_8 = a + 7d = -11$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 10,\ d = -3$

$\therefore\ a_{10} = 10 + 9 \cdot (-3) = -17$

32. $a_1 = 1,\ \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + n(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $\dfrac{1}{45}$　② $\dfrac{1}{46}$　③ $\dfrac{1}{47}$　④ $\dfrac{1}{48}$　⑤ $\dfrac{1}{49}$

해설

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + n$이므로 $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{2}{n^2 - n + 2}$

$a_{10} = \dfrac{2}{10^2 - 10 + 2} = \dfrac{1}{46}$

33. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$를 10으로 나눈 나머지는?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 2013$을
차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n \times (n-1) \times \cdots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n \end{aligned}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,$
$a_4 = 24,\ a_5 = 120,\ a_6 = 6a_5,$
$a_7 = 7a_6,\ \cdots$
따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$을 10으로
나눈 나머지는 3이다.

34. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{11}{4}$ ③ $\dfrac{13}{4}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ $\dfrac{17}{4}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{1\cdot 3}{2^2}a_1$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 4}{3^2}a_2$$

$$a_4 = \frac{3\cdot 5}{4^2}a_3$$

$$\vdots$$

$$\times)\ \underline{a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}a_{n-1}}$$

$\therefore\ a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$

$= \dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{n+1}{2n}\cdot a_1$

$a_1 = 5$를 대입하면 $a_n = \dfrac{5(n+1)}{2n}$

$\therefore a_{10} = \dfrac{5\cdot 11}{2\cdot 10} = \dfrac{11}{4}$

35. 다음과 같은 관계식으로 정의된 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$ (단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

① $2^{n-2} + \frac{2}{5}$ ② $2^{n-2} + 3$ ③ $2^n + 1$
④ $2^{n+1} - 1$ ⑤ $2^{n+2} - 5$

해설

$a_{n+1} = 2a_n + 1$을 변형하면
$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$이므로
수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 4$이고,
공비가 2인 등비수열이 된다.
따라서 $a_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$
그러므로 $a_n = 2^{n+1} - 1$

36. 첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} = 0$의 두 근 α_n, β_n이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$을 만족시킨다고 할 때, a_7의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 445

해설

이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} = 0$의 근과 계수의 관계에서
$\alpha_n + \beta_n = a_n,\ \alpha_n\beta_n = a_{n+1}$
이때, 두 근 α_n, β_n이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$을 만족시키므로
$(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$에서 $\alpha_n\beta_n - 2(\alpha_n + \beta_n) + 4 = 7$
$a_{n+1} - 2a_n + 4 = 7$
즉, $a_{n+1} = 2a_n + 3$이고 $a_1 = 4$이므로
$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$에서
$a_n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1} \quad \therefore a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3$
$\therefore a_7 = 7 \cdot 2^6 - 3 = 445$

37. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = -1$, $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$이 성립할 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $a_2 = -1$

ㄴ $3a_{n+2} = 7a_{n+1} + 2a_n$

ㄷ 수열 $\left\{3a_{n+1} - a_n\right\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$에서 $n = 1$을 대입하면
$2\sum_{k=1}^{1} a_k = 3a_2 - 2a_1 - 1$
즉, $2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$
$\therefore\ a_2 = \dfrac{4a_1 + 1}{3} = -\dfrac{3}{3} = -1$(참)
ㄴ $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \cdots$ ㉠
$2\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \cdots$ ㉡
㉡−㉠에서
$2(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k) = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
$2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$
$\therefore\ 3a_{n+2} = 7a_{n+1} - 2a_n$(거짓)
ㄷ ㉡에서 $3a_{n+2} - a_{n+1} = 6a_{n+1} - 2a_n$
$= 2(3a_{n+1} - a_n)$
따라서 수열 $\left\{3a_{n+1} - a_n\right\}$은 공비가 2인 등비수열이다. (참)
따라서, 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,$
$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$
$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$
$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라하면
$2b_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$
$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$
$\therefore \{b_n\}$은 초항이 1 이고
공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열
$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$a_2 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$
$$\vdots$$
$$+\underline{\ a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$$
$$a_n - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$
$$a_n = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$
$$= 1 + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$$= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1}$$
$$a_n = 3 - 2^{-n+2}$$
$$a_{50} = 3 - 2^{-48}$$
$p = 3,\ q = -48\ \ \therefore p + q = -45$

39. 수직선 위의 점 $P_{n+2}(a_{n+2})$는 점 $P_n(a_n)$과 점 $P_{n+1}(a_{n+1})$을 연결하는 선분 P_nP_{n+1}을 $2:3$으로 내분하는 점이다. $P_1(0)$, $P_2(5)$일 때, 점 P_n의 좌표 a_n은?

① $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$ ② $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$

③ $\frac{25}{6}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}$ ④ $\frac{25}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

⑤ $\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

해설

내분점의 공식에 의하여

$a_{n+2}=\frac{2a_{n+1}+3a_n}{2+3}=\frac{2}{5}a_{n+1}+\frac{3}{5}a_n$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{5}(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-\frac{3}{5}b_n$

이때, $a_2=5,\ a_1=0$이므로 $b_1=a_2-a_1=5$

$\therefore b_n=b_1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=5\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}$

$=\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$

$=\frac{25}{8}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}$

40. 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> I. $a_1 = 3$
> II. a_{n+1}은 ${a_n}^2$을 7로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 20　② 24　③ 35　④ 40　⑤ 42

해설

$a_1 = 3$
$a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$a_4 = 2$
$\vdots$

즉, $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{2n} = 2 \\ a_{2n+1} = 4 \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} 2 = 20$

41. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{12}의 값은?

① $\dfrac{2}{41}$ ② $\dfrac{1}{21}$ ③ $\dfrac{2}{43}$ ④ $\dfrac{1}{22}$ ⑤ $\dfrac{2}{45}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$의 양변의 역수를 취하면

$\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n} = 2 + \dfrac{1}{a_n}$

$\therefore\ \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + 2$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$으로 놓으면 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{1}{2}$이고 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n = \dfrac{1}{2} + (n-1) \cdot 2 = \dfrac{4n-3}{2}$

$\therefore\ a_n = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{2}{4n-3}$

$\therefore\ a_2 = \dfrac{2}{4 \cdot 12 - 3} = \dfrac{2}{45}$

42. 모든 항의 값이 자연수이고 $a_1 < a_2 < a_3 \cdots$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}(n \ge 1)$이 성립하고 $a_6 = 62$라 할 때, $a_1 + a_2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$에서

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + (a_1 + a_2) = a_1 + 2a_2$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_1 + 2a_2) = 2a_1 + 3a_2$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a_1 + 2a_2) + (2a_1 + 3a_2) = 3a_1 + 5a_2$

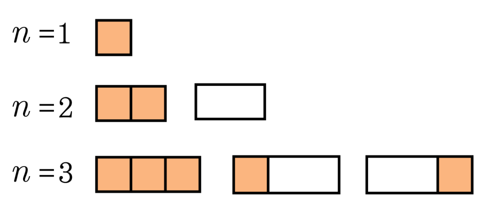
$\therefore\ 3a_1 + 5a_2 = 62$

$a_1,\ a_2$의 값은 자연수이고 $a_1 < a_2$이므로

$a_1 = 4,\ a_2 = 10$

$\therefore\ a_1 + a_2 = 14$

43. 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1인 직사각형을 가로와 세로의 길이가 모두 1인 타일과 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 타일로 채우려고 한다. 이때, 타일을 채우는 방법은 그림과 같이 $n = 1$인 경우는 1가지, $n = 2$인 경우는 2가지, $n = 3$인 경우는 3가지가 존재한다. 가로의 길이 n에 대하여 타일로 직사각형을 채우는 방법의 수를 a_n이라 할 때, a_{10}의 값을 구하여라.
(단, n은 자연수이다.)



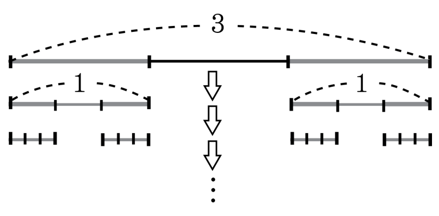
▶ 답 : ____ 가지

▷ 정답 : 89가지

해설

a_n은 마지막에 놓는 타일이 가로의 길이가 1인 경우와 2인 경우 2가지가 있으므로
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$가 성립한다. 그러므로
$a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$
즉, 가로의 길이가 10인 직사각형을 두 종류의 타일로 채우는 경우의 수는 89가지이다.

44. 다음 그림과 같이 길이가 3인 실이 있다. 이 실을 3등분하여 자른 후 가운데의 것은 버리고 다시 남은 두 실을 3등분하여 자른 후 가운데 것은 버린다. 이와 같은 시행을 20회 반복하였을 때, 남아있는 실의 길이의 합은?



① $\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^{21}$
④ $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$ ⑤ $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

해설

위 과정을 n회 반복하였을 때, 남아 있는 실의 길이의 합을 a_n이라고 하면

$a_1 = 3\times\frac{2}{3} = 2,\ a_2 = a_1\times\frac{2}{3},\ a_3 = a_2\times\frac{2}{3},\cdots$ 이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ a_n = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

따라서 구하는 실의 길이의 합은 $a_{20} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{19}$

45. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염 물질에 대해 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다. 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염 물질이 있다. 이 오염물질들은 매년 광산화(햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10% 씩 줄어들지만 매년 15톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 보고서에 의하면 지금으로부터 10년 후 이 호수에 남아 있는 오염 물질의 양은? (단, $0.9^9 = 0.4$로 계산한다.)

① 150톤　② 165톤　③ 177톤　④ 186톤　⑤ 197톤

해설

n년 후 남아있는 오염물질의 양을 $\{a_n\}$
이라하면
$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$
a_1은 1년 후 오염물질의 양이므로
$a_1 = 250 \times 0.9 + 15 = 240$
$(a_{n+1} - \alpha) = 0.9(a_n - \alpha)$
$a_{n+1} = 0.9a_n + 0.1\alpha$
$0.1\alpha = 15 \quad \alpha = 150$
$\therefore a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$
$a_n - 150 = (a_1 - 150) \times 0.9^{n-1}$
$a_n = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$
$a_{10} = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$
$90 \times 0.4 + 150 = 186$

46. 20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$ 은 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 a_{20} = 16$
(나) $\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1} (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 18)$

20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$ 을 모두 곱한 값을 P라 할 때, $\log_4 P$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1}$ 이므로
$\log a_n a_{n+2} = 2\log a_{n+1} = \log a_{n+1}^2$
$\therefore\ a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$
따라서, $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
이 때, 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_1 a_{20} = a \cdot ar^{19} = a^2 r^{19} = 16$
$P = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{19} = a^{20} r^{1+2+3+\cdots+19}$
$= a^{20} r^{190} = (a^2 r^{19})^{10} = 16^{10} = (4^2)^{10} = 4^{20}$
$\therefore\ \log_4 P = \log_4 4^{20} = 20$

47. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$을 만족할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{50} a_k$와 같은 것은? (단, $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$)

① $a_{51} - a_1$　② $a_{51} - a_2$　③ $a_{51} + a_1$

④ $a_{52} - a_2$　⑤ $a_{52} + a_2$

해설

$a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$$
\begin{array}{rl}
 & a_1 = a_3 - a_2 \\
 & a_2 = a_4 - a_3 \\
 & \quad \vdots \\
+) & \underline{a_{50} = a_{52} - a_{51}} \\
 & \sum_{k=1}^{50} a_k = a_{52} - a_2
\end{array}
$$

48. A, B 두 그릇에 농도가 각각 10%, 20% 인 소금물이 각각 100g 씩 들어 있다. A 그릇의 소금물 25g 을 덜어 B 그릇에 담아 잘 섞은 다음 B 그릇의 소금물 25g 을 다시 덜어 A 그릇에 담아 잘 섞는다. 이와 같은 작업을 n 회 시행하였더니 두 그릇의 소금물의 농도의 차가 5% 이하가 되었을 때, 자연수 n 의 최솟값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

n 회 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양은 100g 으로 동일하므로 소금의 양이 바로 농도가 된다.
시행 전 A, B 두 그릇에 들어있는 소금의 양은 각각
$a_0 = 10\text{g},\ \mathrm{b}_0 = 20\text{g}$
n 회 시행 후 각 그릇에 남아 있는 소금의 양을 각각 a_n, b_n 이라 하면

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \left(\frac{1}{4}a_n + b_n\right) \times \frac{1}{5}$$

즉, $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5}b_n \cdots ㉠$

한편, 매 시행 후 두 그릇에 들어 있는 소금의 양의 합은 변함이 없으므로

$$a_0 + b_0 = \cdots = a_n + b_n = a_{n+1} + b_{n+1}$$

$\therefore\ b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{4}{5}b_n \cdots ㉡$

㉡ − ㉠ 에서 $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{3}{5}(b_n - a_n)$

한편, $a_1 = \frac{4}{5}a_0 + \frac{1}{5}b_0 = \frac{4}{5} \cdot 10 + \frac{1}{5} \cdot 20 = 12$

$b_1 = \frac{1}{5}a_0 + \frac{4}{5}b_0 = \frac{1}{5} \cdot 10 + \frac{4}{5} \cdot 20 = 18$

$$\therefore\ b_n - a_n = (b_1 - a_1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = 6 \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n = 10\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

소금물의 농도의 차가 5% 이하가 되려면 소금의 양의 차가 0.05 이하가 되어야 하므로

$$10\left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0.05,\quad \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq \frac{1}{200}$$

양변에 로그를 취하면

$$n(\log 3 - \log 5) \leq -\log 2 - 2$$

$$n \geq \frac{-\log 2 - 2}{\log 3 - \log 5} = \frac{-0.3010 - 2}{0.4771 - 0.699} = 10.37(\because \log 5 = 1 - \log 2)$$

따라서 만족하는 자연수 n 의 최솟값은 11 이다.