1. $4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$4^3+5^3+6^3+\cdots+10^3=\sum_{k=1}^{10}k^3-\sum_{k=1}^{3}k^3$

$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2$

$=3025-36=2989$

2. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$
$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$
$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140$

3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n = \dfrac{n}{3}$, $b_n = 2^n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \dfrac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} + \dfrac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$

4. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)-\sum_{k=4}^{10}(k^2+k)$$

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

(준 식)$=\sum_{k=1}^{3}(k^2+k)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)=20$

5. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$
$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$
$= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3$

6. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2\right) - \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k^2$

$= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470$

7. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26　② 27　③ 28　④ 29　⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

8. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460 ② 468 ③ 478 ④ 480 ⑤ 484

해설

$\sum_{k=1}^{10} k(k+2) = \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^{2} k(k+2)$
$= \sum_{k=1}^{10}(k^2+2k) - \sum_{k=1}^{2}(k^2+2k)$
$= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k - (3+8)$
$= \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2} - 11$
$= 385 + 110 - 11$
$= 484$

9. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^{j} (3+i) \right\}$ 의 값은?

① 385　② 550　③ 1100　④ 1150　⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^{j} (3+i) \right\}$

$= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\}$

$= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7i}{2} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right)$

$= \frac{1}{2}(385 + 385) = 385$

10. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400 ② 425 ③ 450 ④ 475 ⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$

$\therefore$ (준 식) $=\sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150$

$=5\times 55+150=425$

11. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (2a_k - 3b_k + 5) \right\}$ 의 값은?

① 250　② 300　③ 450　④ 550　⑤ 650

해설

$\sum_{n=1}^{10} \left\{ 2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5 \right\}$
$= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$
$= 550$

12. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\frac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{j^2+7j}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\cdot\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 12}{6}+7\times\frac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(385+385)$

$=385$

13. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$
④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로
$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

14. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$ ② $\log 50$ ③ $\log 55$ ④ $\log 60$ ⑤ $\log 66$

해설

$\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$

$= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10}$

$= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right)$

$= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$

15. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = 364$를 만족하는 n의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k\right) = \sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(l^2+l)$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$= 364 = 2^2 \times 7 \times 13$

$\therefore\ n(n+1)(n+2) = 6 \times 2^2 \times 7 \times 13 = 12 \times 13 \times 14$

따라서 $n = 12$

16. 두 수열 $a_n,\ b_n$에 대하여 $a_n = n^3 + 3n^2 + 2n,\ b_n = n^2 + n$일 때, $\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right)$의 값은?

① 4000　② 4100　③ 4200　④ 4300　⑤ 4400

해설

$a_n = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$

$b_n = n^2 + n = n(n+1)$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{4} a_i \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right)$

$= \left\{\sum_{i=1}^{4} i(i+1)(i+2)\right\} \times \sum_{j=1}^{3} j(j+1)$

$= \sum_{i=1}^{4}(i^3 + 3i^2 + 2i) \times \sum_{j=1}^{3}(j^2 + j)$

$$= \left\{\left(\frac{4\cdot 5}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{4\cdot 5\cdot 9}{6} + 2\cdot\frac{4\cdot 5}{2}\right\}$$

$$\times\left(\frac{3\cdot 4\cdot 7}{6} + \frac{3\cdot 4}{2}\right)$$

$= 210 \times 20 = 4200$

17. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=56$을 만족시키는 n의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)$

$=\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n}l^2+\sum_{l=1}^{n}l\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

즉, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=56$이므로

$n(n+1)(n+2)=6\cdot 7\cdot 8$

$\therefore n=6$

18. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right) = 1008$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n} 12 \cdot \left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = 6\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= 6\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2)$

즉, $2n(n+1)(n+2) = 1008$ 이므로

$n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$

$\therefore\ n = 7$

19. 다음 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

$1 \cdot 1 \cdot 3,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 5 \cdot 7,\ 4 \cdot 7 \cdot 9,\ \cdots$

① 10050 ② 11000 ③ 11055

④ 12045 ⑤ 12100

해설

주어진 수열의 일반항은 $n(2n-1)(2n+1) = 4n^3 - n$이므로
첫째항부터 제 10항까지의 합은
$\sum_{k=1}^{10}(4k^3 - k) = 4 \cdot \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 - \frac{10 \times 11}{2}$
$= 12100 - 55 = 12045$

20. 수열 $2 \cdot 3,\ 3 \cdot 5,\ 4 \cdot 7,\ 5 \cdot 9,\ \cdots$ 의 제 n항까지의 합은?

① $4n^2 + 15n + 17$
② $n(4n^2 + 15n + 17)$
③ $\frac{4n^2 + 15n + 17}{3}$
④ $\frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{3}$
⑤ $\frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{6}$

해설

$a_k = (k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1$ 이므로

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k^2 + 3k + 1)$

$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$

$= \frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{6}$

21. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

① 2200 ② 2640 ③ 2860 ④ 3020 ⑤ 3080

해설

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 = \sum_{k=1}^{20} k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \dfrac{20 \cdot 21}{2}$

$= 2870 + 210 = 3080$

22. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$
$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k-2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$
$= 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k$
$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 1155 - 110$
$= 1045$

23. $1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$ 의 값은?

① 442　　② 882　　③ 1540　　④ 3080　　⑤ 3528

해설

(준식) $= \sum_{k=1}^{20} k(21-k)$

$= 21 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2$

$= 21 \cdot \dfrac{20 \cdot 21}{2} - \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 1540$

24. n개의 수 $1 \cdot 2n,\ 2 \cdot (2n-1),\ 3 \cdot (2n-2), \cdots,\ n(n+1)$의 합은?

① $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$　② $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$　③ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$　④ $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{3}$　⑤ $n(n+1)(2n+1)$

해설

주어진 수열의 제 k항은

$k\left\{2n-(k-1)\right\} = k(2n-k+1)$

$= -k^2 + (2n+1)k$

이므로 구하는 합은

$\sum_{k=1}^{n} k\left\{2n-(k-1)\right\}$

$= -\sum_{k=1}^{n} k^2 + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k$

$= -\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

25. $1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$ 의 값은?

① 1310 ② 1320 ③ 1330 ④ 1340 ⑤ 1350

해설

$1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$

$= 1 \cdot (20-1) + 2 \cdot (20-2) + 3 \cdot (20-3) + \cdots + 19 \cdot (20-19)$

$= \sum_{k=1}^{19} k(20-k) = \sum_{k=1}^{19}(20k-k^2)$

$= 20 \times \dfrac{19 \cdot 20}{2} - \dfrac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6}$

$= 190(20-13) = 1330$

26. 수열 $1 \cdot 1,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 5,\ 4 \cdot 7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(2n+1)-3\right\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

27. 100차 방정식 $x^{100}-5x-2=0$의 근을 x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{100}이라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}$의 값은?

① 100　② 125　③ 200　④ 225　⑤ 325

해설

$x^{100}=5x+2$에서 x에 모든 근을 대입해 보면
$x_k^{100}=5x_k+2$
또한 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 100차 방정식의 모든 근의 합은 0이므로 $\sum_{k=1}^{100} x_k$의 값은 0이다.
따라서
$\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}=\sum_{k=1}^{100}(5x_k+2)$
$=5\sum_{k=1}^{100} x_k+\sum_{k=1}^{100} 2=200$

28. 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k)$의 값은?

① -4　　② -3　　③ -2　　④ -1　　⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$에서 두 허근 α, β는
$x^2 + x + 1 = 0$의 근이므로
$\alpha + \beta = -1,\ \alpha\beta = 1,\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 2$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k) = (\alpha+\beta) + (\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^3+\beta^3)$
$= (-1) + (-1) + 2 = 0$

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n$일 때, $\sum_{k=1}^{5} ka_k$의 값은?

① 110　② 125　③ 145　④ 160　⑤ 180

해설

$S_n = n^2 + 2n$이므로
$n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$
$= 2n + 1(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$
$n = 1$ 일 때,
$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$
따라서
$a_n = 2n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이므로
$\sum_{k=1}^{5} ka_k = \sum_{k=1}^{5} k(2k+1)$
$= \sum_{k=1}^{5}(2k^2 + k) = 2\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k$
$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$

30. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{19}$

$= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}$

$B = \sum_{k=1}^{10} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20}$

$= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19}$

$= r\left\{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\right\} = r \cdot A$

따라서 $r = \frac{B}{A}$

31. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$ 일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

32. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20　② 22　③ 25　④ 27　⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,

$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$

$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$

$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

33. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n^2 - n + 3$인 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1}$의 값은?

① 82　② 84　③ 86　④ 88　⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - n + 3 - \left\{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\right\} \\ &= 4n - 3 \ (n \geq 2) \end{aligned}$$

$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} &= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ &= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88 \end{aligned}$$

34. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$　　② $n^2 + 3n$　　③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$　　⑤ $3n^2 - 1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \left\{(n-1)^2 + (n-1)\right\} \\ &= 2n \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n$

$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k - 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

35. $\sum_{k=1}^{n} = n^2 + 1$일 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $a_5 = 9$

ㄴ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2n^2 + n$

ㄷ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = 2n^2 - n + 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 하면
$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2+1) - (4^2+1) = 9$(참)
ㄴ $S_n = n^2 + 1$이므로
$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\}$
$= 2n - 1 (n \geq 2)$
$\therefore\ a_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1 (n \geq 1)$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2n^2 + n$(참)
ㄷ $a_n = 2n - 1 (n \geq 2)$이고 $a_1 = S_1 = 2$이다. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} =$
$2 + \sum_{k=2}^{n} \{2(2k-1) - 1\} = 2 + \sum_{k=2}^{n}(4k-3)$
$= 2 + \sum_{k=1}^{n}(4k-3) - 1 = 2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 3 - 1$
$= 1 + 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n + 1$(참)
따라서, 보기 중에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

36. $\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$ 을 n에 관한 식으로 나타내면?

① $60(2^n-1)$　② $35(2^n-1)$　③ $20(2^n+1)$

④ $20(2^n-1)$　⑤ $16(2^n-1)$

해설

$\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left\{\dfrac{(k-2)(2^n-1)}{2-1}\right\}$

$=(2^n-1)\sum_{k=1}^{10}(k-2)$

$=(2^n-1)\left(\dfrac{10\times 11}{2}-20\right)=35(2^n-1)$

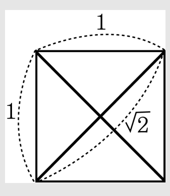
37. 자연수 $n(n \geq 4)$에 대하여 $A_n = \{x \mid x$는 한 변의 길이가1인 정n각형의 대각선의 길이$\}$라 하고, a_n을 집합 A_n의 원소의 개수라 하자. 예를 들어 $a_4 = 1$이다. 이때, $\sum_{n=4}^{25} a_n$의 값은?

① 140 ② 138 ③ 136 ④ 134 ⑤ 132

해설

A_n에서 한 변이 1인 정사각형은 대각선이 $\sqrt{2}$인 한 종류뿐이므로 $a_4 = 1$

같은 방법으로 $a_5 = 1$



$n = 2k\ (k \geq 2)$이면 길이가 다른 대각선은

$\overline{\mathrm{B_1B_3}}, \overline{\mathrm{B_1B_4}}, \cdots, \overline{\mathrm{B_1B_{k+1}}}$의 $k-1$개

즉, $a_{2k+1} = k-1$(개)

$\therefore\ \sum_{n=4}^{25} a_n = \sum_{k=2}^{12}(a_{2k} + a_{2k+1})$

$= \sum_{k=2}^{12}(2k-2) = \sum_{k=1}^{12}(2k-2)$

$= 2 \cdot \dfrac{12 \times 13}{2} - 24 = 132$

38. 어떤 원자의 에너지는 주양자수 n에 의해서 결정된다. 주양자수가 n인 에너지 상태에는 $2n^2$개의 서로 다른 궤도가 존재한다. 주양자수가 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 9$인 에너지 상태에 있는 모든 궤도의 수는? (단, 주양자수가 다른 에너지 상태에 있는 궤도들은 서로 다르다.)

① 770 ② 570 ③ 408 ④ 350 ⑤ 182

해설

$\sum_{k=1}^{9} 2k^2 = 2\cdot\dfrac{9\cdot 10\cdot 19}{6} = 570$

39. 등식 $(1^3-2)+(2^3-4)+(3^3-6)+\cdots+(m^3-2m)=35^2-1$ 이 성립하도록 하는 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(1^3-2)+(2^3-4)+(3^3-6)+\cdots+(m^3-2m)$
$=\sum_{k=1}^{m}(k^3-2k)=\sum_{k=1}^{m}k^3-2\sum_{k=1}^{m}k$

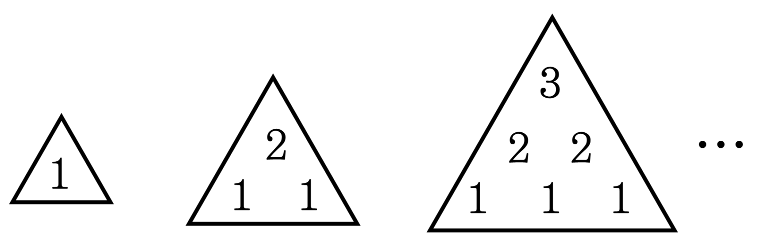
이때, $\sum_{k=1}^{m}k^3=\left\{\dfrac{m(m+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)^2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{m}k=x$ 로 놓으면 주어진 등식은
$x^2-2x=35^2-1,\ x^2-2x=36\cdot34$
$x^2-2x-36\cdot34=0$
$\therefore x=36(\because x>0)$

따라서 $\sum_{k=1}^{m}k=\dfrac{m(m+1)}{2}=36$ 이므로

$m(m+1)=72=8\cdot9$
따라서 $m=8$

40. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 n인 정삼각형의 내부에 다음과 같은 규칙적으로 숫자를 배열한다.



이때, 10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은?

① 440　② 330　③ 220　④ 110　⑤ 90

해설

10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은

$1\cdot 10+2\cdot 9+3\cdot 8+\cdots+10\cdot 1$

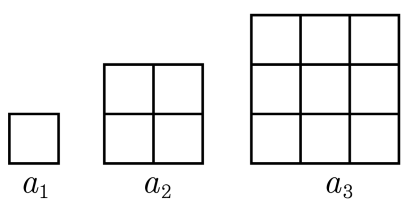
$=\sum_{k=1}^{10} k(11-k)=\sum_{k=1}^{10}(11k-k^2)$

$=11\sum_{k=1}^{10} k-\sum_{k=1}^{10} k^2$

$=11\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}-\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}$

$=605-385=220$

41. 그림과 같이 한 변의 길이가 n(n은 자연수)인 정사각형의 가로, 세로를 n등분하여 생긴 모든 정사각형의 개수를 a_n이라 한다. 예를 들어, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 14$이다. 이때, a_{10}의 값은?



① 385 ② 395 ③ 405 ④ 415 ⑤ 425

해설

크기가 작은 정사각형부터 개수를 세어 규칙을 찾으면

$a_1 = 1$

$a_2 = 2^2 + 1$

$a_3 = 3^2 + 2^2 + 1$

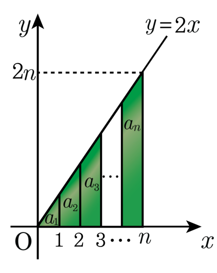
$\vdots$

$a_n = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2$

$= \sum_{k=1}^{n} k^2$

$\therefore a_{10} = \sum_{k=1}^{10} = \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$

42. 오른쪽 그림과 같이 각 영역의 넓이를 차례로 $a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n$ 이라 할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

a_n 은 삼각형의 넓이의 차로 나타낼 수 있으므로

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot n\cdot 2n-\frac{1}{2}(n-1)\cdot 2(n-1)=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

$$\therefore a_1=1,\ a_{10}=19$$

$$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\frac{10(1+19)}{2}=100$$

43. 첫째항이 0 이고 공차가 0 이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d(d \neq 0)$ 라 하면

$a_n = (n-1)d$

$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 에서 $nd \cdot b_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)d$

$nd \cdot b_n = d\left\{\frac{n(n+1)}{2} - n\right\}$, $b_n = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$

$b_{27} = \frac{27-1}{2} = 13$

44. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 210

해설

수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$이므로

$na_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$에서 $n(S_{n+1} - S_n) = S_n$

$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n}$의 양변의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 각각 대입하여 변끼리 곱하면

$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$

$\frac{S_n}{S_1} = n$ 이므로 $S_n = nS_1 = na_1 = n$

$\sum_{n=1}^{20} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = S_1 + S_2 + \cdots S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$

45. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k+1}$ 의 값은?

① $\frac{220}{3}$ ② 110 ③ $\frac{440}{3}$ ④ $\frac{550}{3}$ ⑤ 220

해설

$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{10} \frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{6}$

$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10} k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10} k$

$=\frac{220}{3}$

46. 수열 $1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 5,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}n,\ \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_{100}+S_{25}$ 의 값은?

① -37 ② -65 ③ 37 ④ 65 ⑤ 129

해설

$S_2=-1$
$S_4=(-1)+(-1)=(-1)\cdot 2$
$S_6=(-1)+(-1)+(-1)=(-1)\cdot 3$
$\therefore S_{2n}=(-1)\cdot n$
$\therefore S_{100}=(-1)\cdot 50=-50$
$S_1=1$
$S_3=1+1=1\cdot 2$
$S_5=1+1+1=1\cdot 3$
$\therefore S_{2n-1}=1\cdot n=n$
$\therefore S_{25}=13$
$\therefore S_{100}+S_{25}=-50+13=-37$

47. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$ 의 값은?

① $2n^2$　② $2n^2 - 2n$　③ $2n62 - 4n$

④ $4n^2 - 6n$　⑤ $4n^2 - 6n + 2$

해설

$S_n = n^2 - n$

$S_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1)$

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 2 \ (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 1 - 1 = 0,$

$a_1 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

$\therefore a_n = 2n - 2 \ (n \geq 2)$

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} + a_n) -$

$(a_2 + a_4 \cdots + a_{2n})$

$= \sum_{k=1}^{n} (2k-2) - (a_2 + \cdots + a_{2n})$

그런데 $a_2 + \cdots + a_{2n}$ 은

항수가 n 개, 초항이 $a_2 = 2,$

끝항이 $a_{2n} = 4n - 2$ 인 등차수열의 합이므로

$= \dfrac{n(2 + 4n - 2)}{2} = 2n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} (2k-2) - 2n^2$

$= 2\dfrac{2n(2n+1)}{2} - 4n - 2n^2$

$= 4n^2 + 2n - 4n - 2n^2$

$= 2n^2 - 2n$

48. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족시킨다. 이때, a_{10}의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 39

해설

$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{k} = b_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = (n+1)^2$

$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \ (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \ (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$