

1. $4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$$\begin{aligned} 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3 &= \sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^3 k^3 \\ &= \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2 \\ &= 3025 - 36 = 2989 \end{aligned}$$

2. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3$ 의 값은?

① 110

② 120

③ 122

④ 132

⑤ 140

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 + 3a_k^2 + 3a_k + 1) - \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 - 3a_k^2 + 3a_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6a_k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140 \end{aligned}$$

3. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은?

① 61

② 63

③ 65

④ 67

⑤ 69

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = \sum_{k=1}^5 \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^5 2^k \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67\end{aligned}$$

4. 다음 식의 값은?

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2 + k) - \sum_{k=4}^{10}(k^2 + k)$$

① 14

② 16

③ 18

④ 20

⑤ 22

해설

$$(\text{준 식}) = \sum_{k=1}^3 (k^2 + k) = (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 + 3) = 20$$

5. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3\end{aligned}$$

6. $\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 470

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2 &= (\sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k^2) - \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{15} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 470\end{aligned}$$

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{10} = 30$ 을 만족할 때 $\sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$ 의 값은?

① 26

② 27

③ 28

④ 29

⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1} \\ &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) - \\ & \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) \\ &= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29 \end{aligned}$$

8. $\sum_{k=3}^{10} k(k+2)$ 의 값은?

① 460

② 468

③ 478

④ 480

⑤ 484

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k(k+2) &= \sum_{k=1}^{10} k(k+2) - \sum_{k=1}^2 k(k+2) \\&= \sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k) - \sum_{k=1}^2 (k^2 + 2k) \\&= \sum_{k=1}^{10} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} k - (3 + 8) \\&= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 11 \\&= 385 + 110 - 11 \\&= 484\end{aligned}$$

9. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

① 385

② 550

③ 1100

④ 1150

⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) = 385 \end{aligned}$$

10. $\sum_{l=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \right\}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\sum_{l=1}^5 (k+l) = \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l + 15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425 \end{aligned}$$

11. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

① 250

② 300

③ 450

④ 550

⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \left\{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

12. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

①

385

②

550

③

1100

④

1150

⑤

1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) \\ &= 385 \end{aligned}$$

13. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$$

14. $\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$ 의 값은?

① $\log 45$

② $\log 50$

③ $\log 55$

④ $\log 60$

⑤ $\log 66$

해설

$$\sum_{k=1}^{10} \log \frac{k+2}{k}$$

$$= \log \frac{3}{1} + \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} + \cdots + \log \frac{11}{9} + \log \frac{12}{10}$$

$$= \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{11}{9} \cdot \frac{12}{10} \right)$$

$$= \log \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = \log 66$$

15. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 364$ 를 만족하는 n 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (l^2 + l)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$= 364 = 2^2 \times 7 \times 13$$

$$\therefore n(n+1)(n+2) = 6 \times 2^2 \times 7 \times 13 = 12 \times 13 \times 14$$

따라서 $n = 12$

16. 두 수열 a_n, b_n 에 대하여 $a_n = n^3 + 3n^2 + 2n$, $b_n = n^2 + n$ 일 때,
 $\sum_{i=1}^4 (\sum_{j=1}^3 a_i b_j)$ 의 값은?

① 4000

② 4100

③ 4200

④ 4300

⑤ 4400

해설

$$a_n = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$$

$$b_n = n^2 + n = n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^4 (\sum_{j=1}^3 a_i b_j) = \sum_{i=1}^4 a_i (\sum_{j=1}^3 b_j)$$

$$= (\sum_{i=1}^4 a_i) \times (\sum_{j=1}^3 b_j)$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^4 i(i+1)(i+2) \right\} \times \sum_{j=1}^3 j(j+1)$$

$$= \sum_{i=1}^4 (i^3 + 3i^2 + 2i) \times \sum_{j=1}^3 (j^2 + j)$$

$$= \left\{ \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right)^2 + 3 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \right\}$$

$$\times \left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} + \frac{3 \cdot 4}{2} \right)$$

$$= 210 \times 20 = 4200$$

17. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 56$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} (\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56 \text{ 이므로}$$

$$n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\therefore n = 6$$

18. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l 12k) = 1008$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l 12k) \\ &= \sum_{l=1}^n 12 \cdot \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = 6 \left(\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l \right) \\ &= 6 \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2) \\ &\text{즉, } 2n(n+1)(n+2) = 1008 \text{ 이므로} \\ &n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 \\ &\therefore n = 7 \end{aligned}$$

19. 다음 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

$$1 \cdot 1 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 7, 4 \cdot 7 \cdot 9, \dots$$

① 10050

② 11000

③ 11055

④ 12045

⑤ 12100

해설

주어진 수열의 일반항은 $n(2n-1)(2n+1) = 4n^3 - n$ 이므로
첫째항부터 제 10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (4k^3 - k) &= 4 \cdot \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 12100 - 55 = 12045\end{aligned}$$

20. 수열 $2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, 5 \cdot 9, \dots$ 의 제 n 항까지의 합은?

① $4n^2 + 15n + 17$

② $n(4n^2 + 15n + 17)$

③ $\frac{4n^2 + 15n + 17}{3}$

④ $\frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{3}$

⑤ $\frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{6}$

해설

$$a_k = (k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1 \text{ 이므로}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k^2 + 3k + 1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{6}$$

21. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

① 2200

② 2640

③ 2860

④ 3020

⑤ 3080

해설

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 &= \sum_{k=1}^{20} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2} \\ &= 2870 + 210 = 3080 \end{aligned}$$

22. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$

$$= 1155 - 110$$

$$= 1045$$

23. $1 \cdot 20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + \cdots + 20 \cdot 1$ 의 값은?

① 442

② 882

③ 1540

④ 3080

⑤ 3528

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sum_{k=1}^{20} k(21-k) \\&= 21 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2 \\&= 21 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 1540\end{aligned}$$

24. n 개의 수 $1 \cdot 2n, 2 \cdot (2n-1), 3 \cdot (2n-2), \dots, n(n+1)$ 의 합은?

① $\frac{n^2(n+1)}{2}$

② $\frac{n(n+1)^2}{2}$

③ $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

④ $\frac{(n+1)(2n+1)}{3}$

⑤ $n(n+1)(2n+1)$

해설

주어진 수열의 제 k 항은

$$k \{2n - (k-1)\} = k(2n - k + 1)$$

$$= -k^2 + (2n+1)k$$

이므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^n k \{2n - (k-1)\}$$

$$= -\sum_{k=1}^n k^2 + (2n+1) \sum_{k=1}^n k$$

$$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

25. $1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1$ 의 값은?

① 1310

② 1320

③ 1330

④ 1340

⑤ 1350

해설

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 19 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 17 + \cdots 19 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot (20 - 1) + 2 \cdot (20 - 2) + 3 \cdot (20 - 3) + \cdots + 19 \cdot (20 - 19) \\ &= \sum_{k=1}^{19} k(20 - k) = \sum_{k=1}^{19} (20k - k^2) \\ &= 20 \times \frac{19 \cdot 20}{2} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} \\ &= 190(20 - 13) = 1330 \end{aligned}$$

26. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

27. 100차 방정식 $x^{100} - 5x - 2 = 0$ 의 근을 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} x_k^{100}$ 의 값은?

① 100

② 125

③ 200

④ 225

⑤ 325

해설

$x^{100} = 5x + 2$ 에서 x 에 모든 근을 대입해 보면

$$x_k^{100} = 5x_k + 2$$

또한 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 100차 방정식의 모든 근의 합은 0이므로 $\sum_{k=1}^{100} x_k$ 의 값은 0이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} x_k^{100} &= \sum_{k=1}^{100} (5x_k + 2) \\ &= 5 \sum_{k=1}^{100} x_k + \sum_{k=1}^{100} 2 = 200\end{aligned}$$

28. 방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라고 할 때, $\sum_{k=1}^3 (\alpha^k + \beta^k)$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서 두 허근 α, β 는
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1, \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^3 (\alpha^k + \beta^k) &= (\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3) \\ &= (-1) + (-1) + 2 = 0\end{aligned}$$

29. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 ka_k$ 의 값은?

① 110

② 125

③ 145

④ 160

⑤ 180

해설

$$S_n = n^2 + 2n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$

$$= 2n + 1 (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$$

따라서

$$a_n = 2n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^5 ka_k = \sum_{k=1}^5 k(2k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^5 (2k^2 + k) = 2 \sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 k$$

$$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 125$$

30. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r 을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

- ① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} \\ &= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} \\ &= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19} \\ &= r \{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\} = r \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } r = \frac{B}{A}$$

31. $\sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$$

따라서 $a_n = 4n - 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k+1)(4k-3) \\ &= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k - 3) \\ &= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5 \\ &= 440 - 30 - 15 = 395 \end{aligned}$$

32. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2^n$ 을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 25

④ 27

⑤ 30

해설

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$\therefore a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2^{5-1} = 16$$

$$\therefore a_9 + a_{10} = 25$$

33. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - n + 3$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^5 a_{2k-1}$ 의 값은?

① 82

② 84

③ 86

④ 88

⑤ 90

해설

$S_n = 2n^2 - n + 3$ 이므로

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 - n + 3 - \{2(n-1)^2 - (n-1) + 3\}$$

$$= 4n - 3 \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 2 - 1 + 3 = 4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$$

$$= 4 + 9 + 17 + 25 + 33 = 88$$

34. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$

② $n^2 + 3n$

③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$

⑤ $3n^2 - 1$

해설

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2$$

이것은 ㉞에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2n$$

$$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

35. $\sum_{k=1}^n = n^2 + 1$ 일 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a_5 = 9$

㉡ $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2n^2 + n$

㉢ $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 2n^2 - n + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면

$$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 1) - (4^2 + 1) = 9 \text{ (참)}$$

㉡ $S_n = n^2 + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\} \\ &= 2n - 1 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n (4k-1) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2n^2 + n \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \text{㉢ } a_n &= 2n - 1 \quad (n \geq 2) \text{ 이고 } a_1 = S_1 = 2 \text{ 이다. } \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \{2(2k-1) - 1\} = 2 + \sum_{k=2}^n (4k-3) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^n (4k-3) - 1 = 2 + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 3 - 1 \end{aligned}$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n + 1 \text{ (참)}$$

따라서, 보기 중에서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

36. $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\}$ 을 n 에 관한 식으로 나타내면?

① $60(2^n - 1)$

② $35(2^n - 1)$

③ $20(2^n + 1)$

④ $20(2^n - 1)$

⑤ $16(2^n - 1)$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{(k-2)(2^n - 1)}{2 - 1} \right\} \\ &= (2^n - 1) \sum_{k=1}^{10} (k-2) \\ &= (2^n - 1) \left(\frac{10 \times 11}{2} - 20 \right) = 35(2^n - 1) \end{aligned}$$

37. 자연수 $n(n \geq 4)$ 에 대하여 $A_n = \{x \mid x \text{는 한 변의 길이가 } 1 \text{인 정 } n \text{각형의 대각선의 길이}\}$ 라 하고, a_n 을 집합 A_n 의 원소의 개수라 하자. 예를 들어 $a_4 = 1$ 이다. 이때, $\sum_{n=4}^{25} a_n$ 의 값은?

① 140

② 138

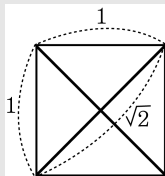
③ 136

④ 134

⑤ 132

해설

A_n 에서 한 변이 1인 정사각형은 대각선이 $\sqrt{2}$ 인 한 종류뿐이므로 $a_4 = 1$
같은 방법으로 $a_5 = 1$



$n = 2k$ ($k \geq 2$)이면 길이가 다른 대각선은

$\overline{B_1B_3}, \overline{B_1B_4}, \dots, \overline{B_1B_{k+1}}$ 의 $k-1$ 개

즉, $a_{2k+1} = k-1$ (개)

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=4}^{25} a_n &= \sum_{k=2}^{12} (a_{2k} + a_{2k+1}) \\ &= \sum_{k=2}^{12} (2k-2) = \sum_{k=1}^{12} (2k-2) \\ &= 2 \cdot \frac{12 \times 13}{2} - 24 = 132 \end{aligned}$$

38. 어떤 원자의 에너지는 주양자수 n 에 의해서 결정된다. 주양자수가 n 인 에너지 상태에는 $2n^2$ 개의 서로 다른 궤도가 존재한다. 주양자수가 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 인 에너지 상태에 있는 모든 궤도의 수는? (단, 주양자수가 다른 에너지 상태에 있는 궤도들은 서로 다르다.)

① 770

② 570

③ 408

④ 350

⑤ 182

해설

$$\sum_{k=1}^9 2k^2 = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 570$$

39. 등식 $(1^3 - 2) + (2^3 - 4) + (3^3 - 6) + \cdots + (m^3 - 2m) = 35^2 - 1$ 이 성립하도록 하는 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$(1^3 - 2) + (2^3 - 4) + (3^3 - 6) + \cdots + (m^3 - 2m) \\ = \sum_{k=1}^m (k^3 - 2k) = \sum_{k=1}^m k^3 - 2 \sum_{k=1}^m k$$

$$\text{이때, } \sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 = (\sum_{k=1}^m k)^2 \text{ 이므로}$$

$\sum_{k=1}^m k = x$ 로 놓으면 주어진 등식은

$$x^2 - 2x = 35^2 - 1, \quad x^2 - 2x = 36 \cdot 34$$

$$x^2 - 2x - 36 \cdot 34 = 0$$

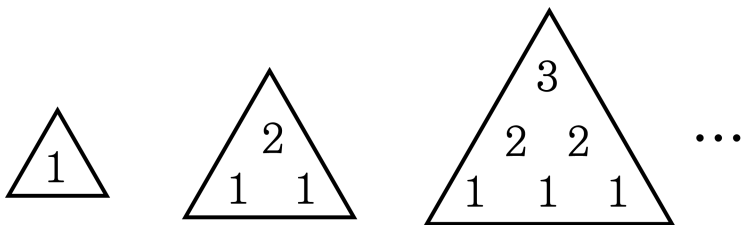
$$\therefore x = 36 (\because x > 0)$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} = 36 \text{ 이므로}$$

$$m(m+1) = 72 = 8 \cdot 9$$

$$\text{따라서 } m = 8$$

40. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 n 인 정삼각형의 내부에 다음과 같은 규칙적으로 숫자를 배열한다.



이때, 10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은?

① 440

② 330

③ 220

④ 110

⑤ 90

해설

10번째 정삼각형 안에 적혀 있는 수의 총합은

$$1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + \cdots + 10 \cdot 1$$

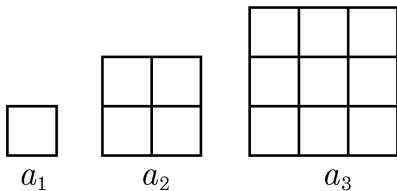
$$= \sum_{k=1}^{10} k(11-k) = \sum_{k=1}^{10} (11k - k^2)$$

$$= 11 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= 11 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6}$$

$$= 605 - 385 = 220$$

41. 그림과 같이 한 변의 길이가 n (n 은 자연수)인 정사각형의 가로, 세로를 n 등분하여 생긴 모든 정사각형의 개수를 a_n 이라 한다. 예를 들어, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 14$ 이다. 이때, a_{10} 의 값은?



① 385

② 395

③ 405

④ 415

⑤ 425

해설

크기가 작은 정사각형부터 개수를 세어 규칙을 찾으면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 + 1$$

$$a_3 = 3^2 + 2^2 + 1$$

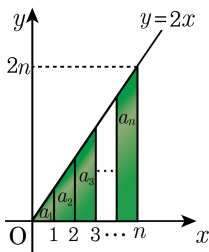
$\vdots$

$$a_n = n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1^2$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\therefore a_{10} = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$$

42. 오른쪽 그림과 같이 각 영역의 넓이를 차례로 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이라 할 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

a_n 은 삼각형의 넓이의 차로 나타낼 수 있으므로

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2n - \frac{1}{2}(n-1) \cdot 2(n-1) = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$\therefore a_1 = 1, a_{10} = 19$$

$$\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = \frac{10(1+19)}{2} = 100$$

43. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d(d \neq 0)$ 라 하면

$$a_n = (n-1)d$$

$$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{에서 } nd \cdot b_n = \sum_{k=1}^n (k-1)d$$

$$nd \cdot b_n = d \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - n \right\}, b_n = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$$

$$b_{27} = \frac{27-1}{2} = 13$$

44. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, $na_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k (n = 1, 2, 3, \dots)$ 를 만족할 때, $\sum_{n=1}^{20} (\sum_{k=1}^n a_k)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 210

해설

수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 이고 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 이므로

$$na_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k \text{ 에서 } n(S_{n+1} - S_n) = S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n} \text{ 의 양변의 } n \text{ 에 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{ 을 각각 대입}$$

하여 변끼리 곱하면

$$\frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_4}{S_3} \times \dots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$$\frac{S_n}{S_1} = n \text{ 이므로 } S_n = nS_1 = na_1 = n$$

$$\sum_{n=1}^{20} (\sum_{k=1}^n a_k) = S_1 + S_2 + \dots + S_{20} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

45. $\sum_{k=1}^{10} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}{2k+1}$ 의 값은?

① $\frac{220}{3}$

② 110

③ $\frac{440}{3}$

④ $\frac{550}{3}$

⑤ 220

해설

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{2k+1} = \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{10} k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= \frac{220}{3}$$

46. 수열 $1, -2, 3, -4, 5, \dots, (-1)^{n-1}n, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_{100} + S_{25}$ 의 값은?

① -37

② -65

③ 37

④ 65

⑤ 129

해설

$$S_2 = -1$$

$$S_4 = (-1) + (-1) = (-1) \cdot 2$$

$$S_6 = (-1) + (-1) + (-1) = (-1) \cdot 3$$

$$\therefore S_{2n} = (-1) \cdot n$$

$$\therefore S_{100} = (-1) \cdot 50 = -50$$

$$S_1 = 1$$

$$S_3 = 1 + 1 = 1 \cdot 2$$

$$S_5 = 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 3$$

$$\therefore S_{2n-1} = 1 \cdot n = n$$

$$\therefore S_{25} = 13$$

$$\therefore S_{100} + S_{25} = -50 + 13 = -37$$

47. $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 의 값은?

① $2n^2$

② $2n^2 - 2n$

③ $2n^2 - 4n$

④ $4n^2 - 6n$

⑤ $4n^2 - 6n + 2$

해설

$$S_n = n^2 - n$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1)$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 2 \quad (n \geq 2)$$

$$a_1 = S_1 = 1 - 1 = 0,$$

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$\therefore a_n = 2n - 2 \quad (n \geq 2)$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} + a_n) -$$

$$(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n})$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k - 2) - (a_2 + \cdots + a_{2n})$$

그런데 $a_2 + \cdots + a_{2n}$ 은

항수가 n 개, 초항이 $a_2 = 2$,

끝항이 $a_{2n} = 4n - 2$ 인 등차수열의 합이므로

$$= \frac{n(2 + 4n - 2)}{2} = 2n^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k - 2) - 2n^2$$

$$= 2 \frac{2n(2n + 1)}{2} - 4n - 2n^2$$

$$= 4n^2 + 2n - 4n - 2n^2$$

$$= 2n^2 - 2n$$

48. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 은 다음을 만족시킨다. 이때, a_{10} 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = (n+1)^2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 39

해설

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{k} = b_n \text{ 이라 하면 } \sum_{k=1}^n b_k = (n+1)^2$$

$$\begin{cases} b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \quad (n \geq 2) \\ b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + \cdots + a_n = n \cdot (2n+1) = 2n^2 + n \quad (n \geq 2) \\ a_1 = b_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 10^2 + 10 - (2 \cdot 9^2 + 9) \\ &= 39 \end{aligned}$$