

1. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

16, - 8, 4, - 2, ……

- ① $8(-2)^n$
- ② $16(-2)^{n-1}$
- ③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
- ④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- ⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n = 16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

2. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

3. 제 3 항이 12 이고 제 6 항이 -96 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $2 \cdot 3^{n-1}$

② $(-3) \cdot 2^{n-1}$

③ $3 \cdot (-2)^{n-1}$

④ $(-2) \cdot 3^{n-1}$

⑤ $2 \cdot (-3)^{n-1}$

해설

$$a_3 = ar^2 = 12$$

$$a_6 = ar^5 = -96$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2$$

$$ar^2 = 4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

4. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 : a_3 = 4 : 9$ 이고, $a_2 = 4$ 일 때, a_5 의 값은?

① $\frac{11}{2}$

② 7

③ $\frac{19}{2}$

④ 12

⑤ $\frac{27}{2}$

해설

공비를 r 이라고 하면

$$a_1 : a_3 = a_1 : a_1 r^2 = 1 : r^2 \text{ 이므로}$$

$$1 : r^2 = 4 : 9 \text{ 에서}$$

$$r^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = a_1 r = 4 \text{ 에서 } \frac{3}{2} a_1 = 4 \quad \therefore a_1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore a_5 = a_1 r^4 = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{27}{2}$$

5. 제2항이 6, 제5항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은? (단, 공비는 실수)

① 3^9

② $2 \cdot 3^9$

③ 3^{10}

④ $2 \cdot 3^{10}$

⑤ 3^{11}

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_5 = ar^4 = 162 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = 2, r = 3$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 3이므로 일반항 a_n

은

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2 \cdot 3^9$$

6. 2와 18의 등비중항을 x , 2와 18의 등차중항을 y 라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

① 122 ② 128 ③ 136 ④ 146 ⑤ 152

해설

x 는 2와 18의 등비중항이므로

$$x^2 = 2 \times 18 = 36$$

y 는 2와 18의 등차중항이므로

$$2y = 2 + 18 = 20$$

$$\therefore y = 10$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 36 + 100 = 136$$

7. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

8. 세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a+2)^2 = a(2a+1)$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

9. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

10. 양수 a, b 에 대하여 세 수 $\log 2, \log a, \log 8$ 이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, b, 16$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$2 \log a = \log 2 + \log 8$$

$$a^2 = 16, \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore b = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

11. 제 4항이 6, 제 7항이 162인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

- ① $\frac{1}{9}(3^{10} - 1)$ ② $\frac{1}{10}(3^{10} - 1)$ ③ $\frac{1}{9}(3^{10} + 1)$
④ $\frac{1}{10}(3^{10} + 1)$ ⑤ $\frac{1}{9}(3^{11} - 1)$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = 6, ar^6 = 162$$

$$r^3 = 27$$

$$\therefore r = 3, a = \frac{2}{9}$$

$$S_n = \frac{\frac{2}{9} \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{9}(3^{10} - 1)$$

12. 제 4항이 -16, 제 7항이 128인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

- ① $\frac{1}{3}(2^{20} - 1)$ ② $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$ ③ $\frac{1}{3}(1 - 2^{20})$
④ $2(1 - 2^{20})$ ⑤ $2(1 + 2^{20})$

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$ar^3 = -16, ar^6 = 128$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r = -2, a = 2$$

$$S_{20} = \frac{2\{1 - (-2)^{20}\}}{1 - (-2)}$$

$$= \frac{2}{3}(1 - 2^{20})$$

13. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

14. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$
이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

15. 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 이 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열을 이룬다. 이때, $\frac{a_{10}}{a_9}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= 2 + (n - 1) \cdot 3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

$$a_n = 2^{3n-1}$$

$\frac{a_{10}}{a_9}$ 는 공비이므로 8

16. 공비가 1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_n = 4$, $S_{2n} = 12$ 이다. S_{6n} 의 값은?

① 252 ② 272 ③ 292 ④ 312 ⑤ 332

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 이라 하면

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 4 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{2n} = \frac{a(r^{2n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)(r^n + 1)}{r - 1} = 12 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4(r^4 + 1) = 12$

$$r^n + 1 = 3 \quad \therefore r^n = 2$$

$$\begin{aligned} S_{6n} &= \frac{a(r^{6n} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^{2n} - 1)(r^{4n} + r^{2n} + 1)}{r - 1} \\ &= 12(2^4 + 2^2 + 1) = 252 \end{aligned}$$

17. $a_1 = 1$ 이고, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 m 이 짝수일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{m-1} = 85$, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_m = 170$ 이다. 이때, $r + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$m = 2k$ (k 는 자연수) 라고 하자.

$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1}$$

$$= \frac{a_1(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = \frac{r^{2k} - 1}{r^2 - 1} = 85 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k}$$

$$= \frac{a_2(r^{2k} - 1)}{r^2 - 1} = 170 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면 $r = 2$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{2^{2k} - 1}{3} = 85, \quad 2^{2k} = 256 = 2^8$$

따라서 $2k = m = 8$

$$r + m = 10$$

18. 다항식 $x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

$f(x) = x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$ 이라 하면

$f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$ 이다.

즉, $f(2) = 2^9 + 2^8 + \cdots + 2 + 1$

따라서 $f(2)$ 는 첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.

$$\therefore f(2) = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

19. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11 항 ② 12 항 ③ 13 항 ④ 14 항 ⑤ 15 항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n-1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

20. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이 있다. 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 100보다 크게 되는가?

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$S_n = \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} > 100 \text{인}$$

자연수 n 의 최솟값을 구하면 된다.

$$2^n - 1 > \frac{100}{3}$$

$$2^n > \frac{103}{3} \approx 34. \times \times \times$$

$$2^5 = 32, \quad 2^6 = 64 \text{이므로}$$

$$n = 6$$

21. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하면

$S_n = n^2 + kn$, $\log_3(T_n - 1) = n$ 이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$ 이므로

$a_3 = S_3 - S_2$

$(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$

$\log_3(T_n - 1) = n$ 에서 $T_n = 3^n + 1$ 이므로

$b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$

$= 28 - 10 = 18$

이때, $a_3 = b_3$ 이므로 $k + 5 = 18 \quad \therefore k = 13$

22. 매출액이 매년 일정한 비율로 증가하는 기업이 있다. 지난 10년간 매출액의 증가율이 69%일 때, 처음 5년간 매출액의 증가율은?

- ① 13% ② 15% ③ 20% ④ 24% ⑤ 30%

해설

매년 매출액의 증가비율을 a 라 하자

$(1+a)^{10} = 1.69$ 일 때

$$(1+a)^5 = \sqrt{1.69} = \sqrt{1.3^2} = 1.3 \text{이므로}$$

1.3배로 증가하였다.

따라서 증가율은 30%

23. 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 a, b, c 인 직육면체에 대하여 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겉넓이가 180일 때, 이 직육면체의 부피는?

- ① 174
- ② 188
- ③ 202
- ④ 216
- ⑤ 230

해설

등비수열 a, b, c 의 공비를 r 이라 하면 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각 a, ar, ar^2 이다.
모서리의 길이의 총합은 $4(a + ar + ar^2) = 60$ 에서
 $a(1 + r + r^2) = 15 \cdots \textcircled{1}$
또, 겉넓이는 $2(a \cdot ar + a \cdot ar^2 + ar \cdot ar^2) = 180$ 에서
 $a^2r(1 + r + r^2) = 90 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 에서 $ar = 6$
따라서 직육면체의 부피 V 는
 $V = a \cdot ar \cdot ar^2 = a^3r^3 = (ar)^3 = 6^3 = 216$

24. 100 만원을 월이율 2%, 1 개월마다의 복리로 빌릴 때, 1 년 후에는 얼마를 갚아야 하는가?(단, $1.02^{12} = 1.2682$)

- ① 1258200 원 ② 1268200 원 ③ 1278200 원
④ 1288200 원 ⑤ 1298200 원

해설

$$\begin{aligned} S &= 1000000(1 + 0.02)^{12} = 10^6 \times 1.02^{12} \\ &= 10^6 \times 1.2682 = 1268200(\text{원}) \end{aligned}$$

25. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단, $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 $1000\text{만} \times (1.04)^1$
(10년후 원리합계)
 $= 1000\text{만} \times 1.04^{10}$
 $= 1000\text{만} \times 1.48$
 $= 1480\text{만 (원)}$

26. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$ 로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k 의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{1}$
따라서, $n \geq 2$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되려면
 $\textcircled{1}$ 이 $n = 1$ 일 때에도 성립해야 하므로
 $3 = 6 + k \quad \therefore k = -3$

27. 수열 3, 33, 333, 3333, ...의 일반항 a_n 을 구하여라.

① $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$

② $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 1)$

③ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

④ $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 2)$

⑤ $a_n = \frac{2}{3}(10^n - 2)$

해설

수열 9, 99, 999, 9999, ...에서

$$9 = 10^1 - 1, 99 = 10^2 - 1, 999 = 10^3 - 1, 9999 = 10^4 - 1, \dots$$

따라서 이 수열의 일반항은 $10^n - 1$ 이다.

수열 3, 33, 333, 3333, ...의 각 항은

$$3 = 9 \times \frac{1}{3}, 33 = 99 \times \frac{1}{3}, 333 = 999 \times \frac{1}{3}, \dots \text{이므로}$$

주어진 수열의 일반항은 $a_n = \frac{1}{3}(10^n - 1)$ 이다.

28. 수열 1, 11, 111, 1111, ... 에서 제100 항은?

① $\frac{10^{200} - 1}{9}$
④ $\frac{10^{200} - 1}{9}$

② $\frac{10^{100} - 1}{9}$
⑤ $10^{200} + 1$

③ $10^{100} + 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10 + 1$$

$$a_3 = 10^2 + 10 + 1$$

$\vdots$

$$a_n = 10^{(n-1)} + \cdots + 10^2 + 10 + 1$$

$$= \frac{1 \{10^n - 1\}}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{10^{100} - 1}{9}$$

29. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$ 의 값은?

$$a_n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

- ① $2^{200} - 1$
- ② $2^{200} - 2$
- ③ $2^{200} - 100$
- ④ $2^{199} - 2^{99}$
- ⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$
$$a_{200} = 2^{199}$$
$$a_{100} = 2^{99}$$
$$\therefore a_{200} - a_{100} = 2^{199} - 2^{99}$$

30. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉡에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

두수 a, b 에 대하여 등차중항을 A , 등비중항을 G , 조화중항을 H 라고 하면
 $A = \frac{a+b}{2}, G = \textcircled{\text{㉠}}, H = \frac{\textcircled{\text{㉡}}}{a+b}$
이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
 $A \geq G \geq H$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립), $\textcircled{\text{㉢}} = G^2$
따라서 등비중항 G 는 등차중항 A 와 조화중항 H 의 $\textcircled{\text{㉣}}$ 이며, 세 수는 $\textcircled{\text{㉤}}$ 를 이룬다.

- ① $\textcircled{\text{㉠}}$ - $\sqrt{ab}$
- ② $\textcircled{\text{㉡}}$ - ab
- ③ $\textcircled{\text{㉢}}$ - $A \times H$
- ④ $\textcircled{\text{㉣}}$ - 등비중항
- ⑤ $\textcircled{\text{㉤}}$ - 등비수열

해설

세 수 a, x, b 가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,

$\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, x = \frac{2ab}{a+b}$

31. 서로 다른 세 수 x, y, z 가 차례로 등비수열을 이루고, 세 수 $x, 2y, 3z$ 가 차례로 등차수열을 이룰 때, $\frac{z}{x}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{6}$
- ⑤ $\frac{1}{9}$

해설

서로 다른 세 수 x, y, z 가 차례로 등비수열을 이루므로

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \quad \therefore y^2 = xz \cdots \cdots \textcircled{A}$$

또한, 세 수 $x, 2y, 3z$ 가 차례로 등차수열을 이루므로

$$4y = x + 3z \quad \therefore x = 4y - 3z \cdots \cdots \textcircled{B}$$

②을 ①에 대입하면

$$y^2 = (4y - 3z)z, \quad 3z^2 - 4yz + y^2 = 0$$

양변을 y^2 으로 나누면

$$3\left(\frac{z}{y}\right)^2 - 4\cdot\frac{z}{y} + 1 = 0$$

$$\left(3\cdot\frac{z}{y} - 1\right)\left(\frac{z}{y} - 1\right) = 0$$

$$\therefore \frac{z}{y} = \frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{z}{y} = 1$$

$$\text{그런데 } y \neq z \text{이므로 } \frac{z}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\text{즉, 공비가 } \frac{1}{3} \text{이므로 } \frac{z}{x} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

32. 다음 값을 계산하면?

$$\log_3 9 + \log_3 9^2 + \log_3 9^4 + \cdots + \log_3 9^{2^{n-1}}$$

- ① $\log_3 9^{2^{n-1}}$

② $\log_3 9^{2^n}$

③ $\log_2 (n-1)$
- ④ $2^n - 1$

⑤ $2^{n+1} - 2$

해설

주어진 식은 $a_n = \log_3 9^{2^{n-1}}$ 인 수열의 합 S_n 이다.

$$a_n = 2^{n-1} \cdot \log_3 9 = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

a_n 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

33. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서
 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 36$,
 $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{2n} = 18$ 일 때,
 $a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36 \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{2n} - S_n = 18 \text{에서 } S_{2n} = S_n + 18 = 36 + 18 = 54$$

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{a(1-r^{2n})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r} \\ &= 36 \cdot (1+r^n) = 54 \end{aligned}$$

$$1+r^n = \frac{3}{2} \quad \therefore r^n = \frac{1}{2}$$

$$S_{3n} = \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}$$

$$= 36 \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = 63$$

이때, $a_{2n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+3} + \cdots + a_{3n} = S_{3n} - S_n$ 이므로
 $63 - 54 = 9$

34. 등비수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $|S_n - 1| < 0.001$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\therefore |S_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{2^n} - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

1000 < 2^n 인 n 의 최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$, $2^9 = 512$ 이므로 $2^n > 1000$ 인 n 의 최솟값은 10

35. 매년 말에 6만원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계는?
(단, 연이율은 6푼, 1년마다의 복리로 계산하고, $1.06^{10} \approx 1.791$)

- ① 791000 원 ② 792000 원 ③ 793000 원
④ 794000 원 ⑤ 795000 원

해설

$$S_n = \frac{60000 \{ (1.06)^{10} - 1 \}}{0.06} = \frac{60000 \times 0.791}{0.06} \\ = 791000(\text{원})$$

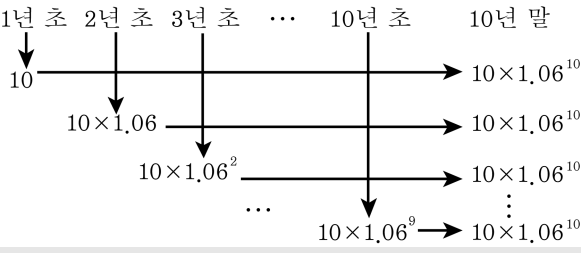
36. 정부가 통일 이후 필요한 비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2015년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6%씩 증액한다. 2015년 1월 1일부터 10조원을 적립하기 시작한다면 2024년 12월 31일 까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조원인지 구하여라. (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고 $1.06^{10} = 1.8$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 180

해설

2015년 1월 1일 적립금이 10조원이므로 n 년 후의 적립금은 10×1.06^n (조원)이다.



따라서 구하는 적립금의 원리합계는
 $10 \times 10 \times 1.06^{10} = 10 \times 10 \times 1.8 = 180$ (조원)

37. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 3^n - 1$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a 이고 공비가 r 인 등비수열이다. 이때, $a + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$S_n = 3^n - 1$$

$$S_{n-1} = 3^{n-1} - 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 \\ &= 3^n - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$a_1 = S_1 = 2$$

$$\therefore a = 2, \quad r = 3$$

$$\therefore a + r = 2 + 3 = 5$$

38. $a_1 = 8$, $a_4 = 1$ 이고 각 항이 실수인 등비수열 a_n 에 대하여 수열 b_n 을 $b_n = \log_2 a_{2n}^2$ 으로 정의하면 수열 b_n 은 첫째항이 c 이고 공차가 d 인 등차수열이다. 이때, $c - d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a_4 = 8 \times r^3 = 1 \text{에서 } r^3 = \frac{1}{8}, r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{이므로 } a_{2n} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\therefore b_n = \log_2 \left\{ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \right\}^2 = 2 \log_2 2^{-2n+4}$$

$$= 2(-2n+4) = -4n+8$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 4이고 공차가 -4인 등차수열이다.

$$\therefore c - d = 8$$

39. 네 양수 a, b, c, d 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때 옳은 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(a+b)(c+d) \geq 4ad$

㉡ $a+b+c+d \geq 4\sqrt{ad}$

㉢ 함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 의 역함수는 존재한다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

네 양수 a, b, c, d 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ad = bc$

㉠ $(a+b)(c+d) = ad + bc + ac + bd$
 $\geq 2ad + 2\sqrt{ac \cdot bd} = 4ad$ ($\because ad = bc$) $\therefore$ 참

㉡ $a+b+c+d = (a+c) + (b+d)$
 $\geq 2\sqrt{(a+c)(b+d)}$
 $\geq 2\sqrt{(ad+bc) + (ab+cd)}$
 $\geq 2\sqrt{2ad + 2\sqrt{ab \cdot cd}} = 2\sqrt{2ad + 2ad}$
 $= 4\sqrt{ad}$ $\therefore$ 참

㉢ 수열 a, b, c, d 의 공비를 r 이라 하면

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+ar}{cx+cr} = \frac{a(x+r)}{c(x+r)} = \frac{a}{c}$$

따라서, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 는 상수함수이므로 역함수는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

40. 수열 $2, 2^2 + 2^3, 2^4 + 2^5 + 2^6, 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}, \dots$ 의 마지막 항이 $2^{79} - 2^{67}$ 일 때, 첫째항부터 마지막 항까지의 합은?
- ① $2^{79} - 2$ ② $2^{79} - 1$ ③ 2^{79}
④ 2^{79+1} ⑤ $2^{79} + 2$

해설

마지막 항을 제 n 항이라 하고 첫째항부터 마지막 항까지의 첫 번째 수를 배열하면

$$2, 2^2, 2^4, 2^7, \dots, 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$$

따라서 제 n 항은 첫째항이 $2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$, 공비가 2인 등비수열의 제 n 항까지의 합이므로

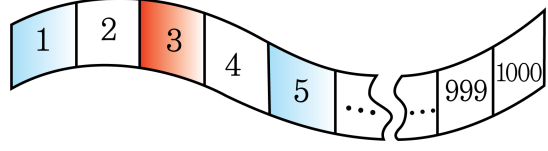
$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}(2^n - 1)$$

$$2^{79} - 2^{67} = 2^{67}(2^{12} - 1) = 2^{\frac{12 \times 11}{2}+1}(2^{12} - 1) \text{ 이므로 } n = 12$$

따라서 첫째항부터 마지막 항 즉, 제 12항까지의 합은

$$\frac{2(2^{78}-1)}{2-1} = 2^{79} - 2$$

41. 그림과 같이 1부터 1000까지의 자연수가 쓰여 있는 회색 종이 띠에 1부터 시작하여 공차가 4인 등차수열의 수가 있는 부분에는 빨간색, 3부터 시작하여 공비가 3인 등비수열의 수가 있는 부분에는 파란색을 칠하였다. 빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해진 부분에 쓰여있는 수 중에서 가장 큰 수를 구하여라.



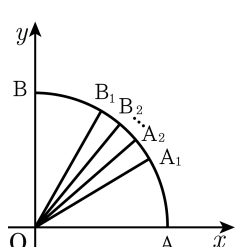
▶ 답 :

▷ 정답 : 729

해설

빨간색이 칠해진 부분의 쓰여진 수 : $(4n - 3)$ 꼴
파란색이 칠해진 부분의 쓰여진 수 : (3^m) 꼴
빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해지는 부분에 쓰여진 수
: (9^k) 꼴이므로 9, 81, 729(단, k, m, n 은 자연수)
 $\therefore$ 가장 큰 수는 729

42. 그림과 같이 사분원 AOB에 대하여 $\angle AOB$ 를 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_1 , B_1 이라 하고, $\angle A_1OB_1$ 을 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_2 , B_2 라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, $\angle A_{10}OB$ 의 크기는?



- ① $\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^9}\right)$ ② $\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^9}\right)$ ③ $\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)$
 ④ $\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{10}}\right)$ ⑤ $\frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{11}}\right)$

해설

$$\angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \angle A_{10}OA$$

$$\angle A_{10}OA = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \frac{\pi}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)$$

$$\therefore \angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)$$

$$\therefore \angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right) = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{10}}\right)$$

43. 어떤 나라의 현재 인구는 b 명이고, n 년 전에는 a 명이였다. 지난 n 년 동안 매년 인구 증가율이 일정하였고 내년에도 인구증가율이 같다고 예상할 때, 이 나라의 내년의 인구는 몇 명인가?

- ① $a \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}}$ ② $b \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}}$ ③ $a \left(\frac{a}{b} \right)^n$
 ④ $b \left(\frac{a}{b} \right)^n$ ⑤ $a \left\{ \left(\frac{a}{b} \right)^n \right\} - 1$

해설

인구 a 명에 대한 연간 인구증가율이 r 일 때, 1 년 후 증가된 인구는 ar (명) 이므로

1 년 후 총인구는 $a + ar = a(1 + r)$ (명)

2 년 후 총인구는 $a(1 + r) + a(1 + r) \cdot r = a(1 + r)^2$ (명)

⋮

n 년 후 총인구는 $a(1 + r)^n$ (명)

즉, $a(1 + r)^n = b$ 에서

$$(1 + r)^n = \frac{b}{a}, \quad 1 + r = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}}$$

따라서, 이 나라의 내년의 인구는

$$b(1 + r) = b \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{n}} \text{ (명)}$$