1. x 축 위의 두 점 A$(-4,\ 0)$, B$(12,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $5 : 3$ 으로 내분하는 점을 P, $3 : 7$ 로 외분하는 점을 Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점의 좌표는?

① $(-5,\ 0)$ ② $(-4,\ 0)$ ③ $(5,\ 0)$
④ $(4,\ 0)$ ⑤ $(-1,\ 0)$

해설

그림에서 내분점 P$(x,\ y)$ 는

$$x = \frac{60-12}{5+3} = 6, \quad y = \frac{0+0}{5+3} = 0$$

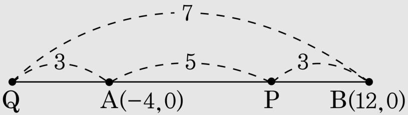
$\therefore$ P$(6,\ 0)$

외분점 Q$(x,\ y)$ 는

$$x = \frac{36+28}{3-7} = \frac{64}{-4} = -16,\ y = 0$$

$\therefore$ Q$(-16,\ 0)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 M$\left(\frac{6-16}{2},\ 0\right) = (-5,\ 0)$



2. 다음 중 가장 큰 수는?

① $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$　③ $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

④ $\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

해설

내분점의 성질을 이용하면 $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ 이 가장 크다.

3. 네 점 $A(1,4)$, $B(-2,-3)$, $C(x,y)$, $D(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① $C(-1,\ 2)$ ② $C(3,\ 0)$ ③ $C(3,\ 4)$

④ $C(1,\ -1)$ ⑤ $C(0,\ 0)$

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

$\therefore\ C(3,0)$

4. $ab<0,\ ac>0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면

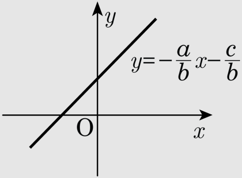
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab<0,\ ac>0$이므로 $b\neq 0$ 이다.

따라서, 주어진 직선의 방정식을 b로 나누어 정리하면

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$



$$(\text{기울기})=-\frac{a}{b}>0$$

한편, $ab<0,\ ac>0$이므로

$ab\cdot ac=a^2bc<0$

따라서 $bc<0$

$$(y\text{ 절편})=-\frac{c}{b}>0$$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제4 사분면은 지나지 않는다.

5. 다음 두 이차방정식 $x^2 - y^2 = 0$과 $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$의 해의 개수는?

① 없다　　② 1 개　　③ 2 개

④ 4개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x^2 - y^2 = 0$ 에서 $(x+y)(x-y) = 0$

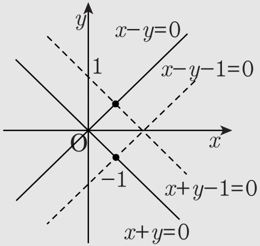
$\therefore x+y=0$ 또는 $x-y=0$

$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서 $(x-1)^2 - y^2 = 0$

$(x+y-1)(x-y-1) = 0$

$\therefore x+y-1=0$ 또는 $x-y-1=0$

따라서, 다음 그림과 같이 $x^2 - y^2 = 0$ 는 두 직선 $x+y=0$, $x-y=0$ $x^2-y^2-2x+1=0$ 는 두 직선 $x+y-1=0$, $x-y=0$ 위의 점이므로 다음 그림에서 교점의 개수는 2개



6. 두 직선 $ax+by+c=0$, $cx+ay+b=0$이 일치할 때, 이 직선과 평행하며, 점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $x-y=1$ ② $2x+y=5$ ③ $2x-y=3$

④ $x+2y=5$ ⑤ $x+y=3$

해설

$ax+by+c=0 \Rightarrow$

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}\cdots$㉠

$cx+ay+b=0 \Rightarrow$

$y=-\dfrac{c}{a}x-\dfrac{b}{a}\cdots$㉡

㉠,㉡이 일치하므로 $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{c}{a},\ -\dfrac{c}{b}=-\dfrac{b}{a}$

$a^2=bc,\ b^2=ac$

$\therefore c=\dfrac{a^2}{b},\ c=\dfrac{b^2}{a}$

$\therefore \dfrac{a^2}{b}=\dfrac{b^2}{a}$

$\therefore a^3=b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$\therefore a=b\ (\because a^2+ab+b^2\neq 0\ )$

$\therefore c=\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{a^2}{a}=a$

$\therefore a=b=c$

$\therefore$ ㉠ $: x+y+1=0,\ y=-x-1$

$\therefore$ 구하는 직선의 기울기 : -1

$\therefore$ 구하는 직선 : $y-1=(-1)(x-2)$

$\Rightarrow x+y-3=0$

7. 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x+5y=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{5}{8}x+\frac{5}{31}$ ② $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{5}$

④ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{11}$ ⑤ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{11}{31}$

해설

$2x+y-7=0 \cdots\cdots$ ㉠

$3x+2y-12=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ : $x=2,\ y=3$

$\therefore$ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$

구하는 직선의 기울기는 $-\frac{8}{5}$

$\left(\because\ y=-\frac{8}{5}x\right.$ 와 평행하다.$\left.\right)$

$\therefore$ 구하는 직선은 기울기 $-\frac{8}{5}$ 이고

$(2,\ 3)$ 을 지나므로

$y-3=-\frac{8}{5}(x-2)$

$\therefore y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

8. 이차방정식 $x^2+y^2+kx-2ky+k^2+k=0$ 의 그래프가 원을 나타내도록 상수 k 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k \le 4$ ② $\frac{1}{4} \le k \le 4$

③ $0 < k < 4$ ④ $k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 4$

해설

$$\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+(y-k)^2=\frac{k^2}{4}-k$$

원이 되려면 $\frac{k^2}{4}-k>0$ 이 성립해야 한다.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}(k-4)k>0$

$\Rightarrow \quad k<0$ 또는 $k>4$

9. 두 원 $x^2-2x+y^2+3=0$과 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x-y-3=0$　　② $2x-2y+3=0$

③ $2x-2y-3=0$　　④ $2x+2y-3=0$

⑤ $2x+2y+3=0$

해설

$(x^2-2x+y^2+3)-(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$

$-4x+4y+6=0$

$\therefore\ 2x-2y-3=0$

10. 반지름의 길이가 각각 $4\,\mathrm{cm}$, $9\,\mathrm{cm}$ 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① $8\,\mathrm{cm}$ ② $10\,\mathrm{cm}$ ③ $11\,\mathrm{cm}$ ④ $12\,\mathrm{cm}$ ⑤ $14\,\mathrm{cm}$

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
$13\,\mathrm{cm}$ 이다.
공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2-(9-4)^2}=12$

11. 직선 $3x+4y-5=0$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때, 이 직선의 y 절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

직선 $3x+4y-5=0$ 를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시키면
$3(x-2)+4(y+3)-5=0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 식을 정리하면 $3x+4y+1=0$
따라서 이 직선의 y 절편의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

12. $y = x^2 - 2$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식은?

① $y = -x^2 + 2$ ② $y = -x^2 + 3$ ③ $y = x^2 + 2$

④ $y = 2x^2 + 2$ ⑤ $y = 3x^2 + 2$

해설

$y = ax^2 + b$ 를 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식

$y = -ax^2 - b$

$y = x^2 - 2$ 를

x 축에 대하여 대칭 이동시킨 도형의 방정식은

$-y = x^2 - 2$

$\therefore y = -x^2 + 2$

13. 점 $(-1,\ k)$ 가 포물선 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 위쪽에 있도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

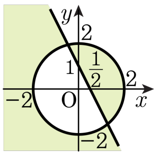
① $k < -2$　② $k < -1$　③ $k > 1$

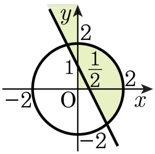
④ $-2 < k < 1$　⑤ $-1 < k < 1$

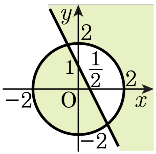
해설

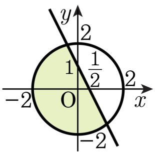
주어진 함수가 $x = -1$ 일때 $y = 1$ 이므로
점 $(-1,\ k)$ 가 포물선 위쪽에 있기 위해서는
$k > 1$ 이어야 한다.

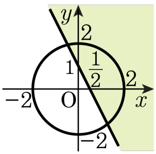
14. 부등식 $(2x+y-1)(x^2+y^2-4)<0$ 의 영역을 바르게 나타낸 것은?(단, 경계선은 제외한다.)

①


②


③


④


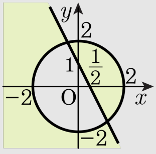
⑤


해설

부등식 $(2x+y-1)(x^2+y^2-4)<0$ 에서

$\begin{cases} 2x+y-1>0 \\ x^2+y^2-4<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x+y-1<0 \\ x^2+y^2-4>0 \end{cases}$

따라서, 주어진 부등식의 영역은 다음 그림과 같다.



(단, 경계선 제외)

15. 세 부등식 $y \geq x$, $y \geq -2x$, $y \leq -\frac{1}{2}x + 3$을 동시에 만족하는 영역의 넓이는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

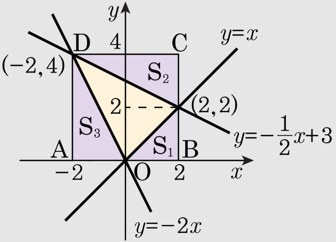
주어진 부등식을 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.

따라서, 구하는 넓이는

$\square ABCD - (S_1 + S_2 + S_3)$

$= 4 \cdot 4 - \frac{1}{2}(2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4)$

$= 6$



(단, 경계선 포함)

16. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\dfrac{3b-2a}{a+b}=-\dfrac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \quad b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \quad \Leftrightarrow \quad -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

17. 부등식 $|x+1|<1+|2-x|$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<1$

해설

$|x+1|<1+|2-x|$ 에서

ⅰ) $x<-1$일 때,

$-(x+1)<1+(2-x)$

$\therefore -1<3$이므로 성립

$\therefore\ x<-1$

ⅱ) $-1\le x<2$일 때,

$x+1<1+2-x$

$\therefore\ 2x<2$

$\therefore\ x<1$

조건과 공통 범위를 구하면 $-1\le x<1$

ⅲ) $x\ge 2$ 일 때,

$x+1<1-(2-x)$

$\therefore\ 1<-1$ 이므로 모순

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 구하는 부등식의 해는 $x<1$

18. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$ 이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \leq k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \geq 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \leq 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \leq 0$

$\therefore\ k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0$ 또는 $k \geq 4$

$\therefore\ \ k \geq 4(\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

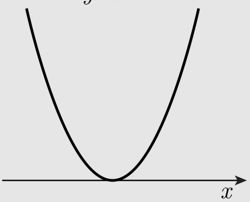
19. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

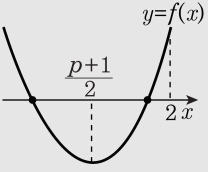
20. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$ ② $\frac{1}{2}<p<1$ ③ $1\le p<2$

④ $1<p<\frac{4}{3}$ ⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$

$p^2+6p-7>0,\ \ (p+7)(p-1)>0$

$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$

(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$

$3p<4$

$\therefore p<\frac{4}{3}$

(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로

$\frac{p+1}{2}<2$

$\therefore p<3$

(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$

그런데 $p>0$ 이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

21. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

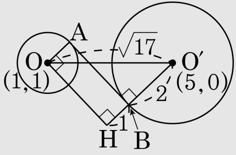
두 원의 중심거리는

$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$

이므로 $\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}$

$=\sqrt{17-3^2}=2\sqrt{2}$



따라서, 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

22. 중심이 $\mathrm{C}(1,\ 2)$ 이고, 직선 $\mathrm{L}\ :\ x+2y=0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\therefore$ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

23. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3\cdot1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$|a-1|=10$
$a-1=\pm10$
$a>0$ 이므로 $a=11$

24. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\sqrt{4^2+3^2}+2=7$

25. 점 $(a,\ -3)$ 이 포물선 $y = x^2 + 4x$ 의 윗부분에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $-3 < a < -1$ ② $-3 \le a < 1$ ③ $1 < a < 3$

④ $1 \le a < 3$ ⑤ $-3 < a < 1$

해설

점 $(a,\ -3)$ 이 포물선 $y = x^2 + 4x$ 의 윗부분에 있으므로

$-3 > a^2 + 4a$, $(a+3)(a+1) < 0$

$\therefore -3 < a < -1$