1. 네 점 $A(1,4)$, $B(-2,-3)$, $C(x,y)$, $D(6,7)$를 네 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 C의 좌표는?

① $C(-1,\ 2)$ ② $C(3,\ 0)$ ③ $C(3,\ 4)$
④ $C(1,\ -1)$ ⑤ $C(0,\ 0)$

해설

평행사변형의 대각선의 성질에 의해 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$$\left(\frac{6-2}{2},\ \frac{7-3}{2}\right)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$$(2\ ,\ 2)=\left(\frac{x+1}{2},\ \frac{y+4}{2}\right)$$

$\therefore\ x=3\ ,\ y=0$

$\therefore\ C(3,0)$

2. 직선 $ax + by + c = 0$은 $ab > 0$, $bc < 0$일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

① 제 1 사분면
② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면
⑤ 제 1 사분면 ,제 2 사분면

해설

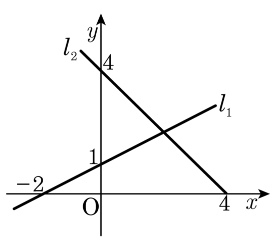
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$에서

$-\frac{a}{b} < 0$ ($\because$ $ab > 0$)

$-\frac{c}{b} > 0$ ($\because$ $bc < 0$)이므로

제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

3. 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 두 직선 l_1, l_2 의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y = ax$ 이다. 이때, a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

직선 l_1 은 x절편이 -2이고,

y절편이 1이므로 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$에서

$x - 2y = -2 \cdots\cdots$ ㉠

직선 l_2는 x절편이 4이고, y절편이 4이므로

$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$에서

$x + y = 4 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 풀면 $x = 2, y = 2$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x$

$\therefore\ a = 1$

4. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4 이다.

5. 이차방정식 $x^2 - ay^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타낼 때 두 괄호에 들어갈 알맞은 값의 합을 구하여라.

$a = (\qquad), k < (\qquad)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

원의 방정식이 되기 위해서는 x^2 의 계수와 y^2 의 계수가 같아야 하므로 $a = -1$

또한, 준식을 표준형으로 나타내면,

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + k = 0$ 에서

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5 - k$

여기서, $5 - k > 0$ 이어야 하므로 $k < 5$

6. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

7. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+1, y-2)$에 의하여 점$(3, 3)$은 어느 점에서 옮겨진 것인가?

① $(0, 0)$ ② $(3, 3)$ ③ $(1, -2)$
④ $(-1, 2)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+1$, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 변환이므로 $(a+1, b-2) = (3, 3)$ 따라서 $a = 2$, $b = 5$

8. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+4x-6y+8=0$을 평행이동하여 원 $x^2+y^2=c$를 얻었다. 이 때, 상수 c의 값은?

① 3　　② 5　　③ 6　　④ 9　　⑤ 16

해설

$x^2+y^2+4x-6y+8=0$을 변형하면
$(x+2)^2+(y-3)^2=5$
이 원이 평행이동하여 $x^2+y^2=c$가 되려면 $c=5$

9. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

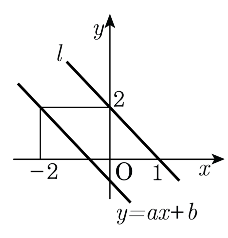
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$
$= x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$
$= 3x^2-4x+3y^2-4y+6$
$= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

$\therefore\ P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

10. 다음 직선 l 과 평행하면서 점 $(-2,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값은 ?



① -4　　② -3　　③ -2

④ -1　　⑤ 0

해설

그림의 직선의 기울기는 -2 이므로
구하는 직선은 기울기가 -2 이고 점 $(-2,\ 2)$ 를 지난다.
$y - 2 = -2(x + 2),\ y = -2x - 2$
$y = -2x - 2,\ a = -2, b = -2$ 이므로,
$\therefore\ a + b = -4$

11. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a=2$

12. 세 직선 $l_1 : ax+y+2=0$, $l_2 : bx-3y-3=0$, $l_3 : (b+2)x+y-2=0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.
$(-a)\cdot\frac{b}{3}=-1, \quad \therefore\ ab=3 \cdots$ ㉠
l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.
$-a=-b-2, \quad \therefore\ a-b=2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 이용하면
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4+6=10$

13. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1 - y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x + 2 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0,\ 1 - y = 0$

$\therefore x = -2,\ y = 1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a = -2,\ b = +1$

$\therefore\ a + b = -1$

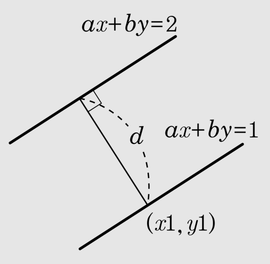
14. 평행한 두 직선 $ax+by=1$, $ax+by=2$ 사이의 거리는?

① $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$　③ $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$
④ $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$　⑤ $\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}$

해설

두 직선은 서로 평행하므로 직선 $ax+by=1$
위의 한 점을 (x_1, y_1) 이라 놓으면
$ax_1+by_1=1$ 점 (x_1, y_1) 에서
직선 $ax+by=2$ 까지의 거리 d 는

$$d=\frac{|ax_1+by_1-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{|1-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



15. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+y^2=4$　　② $x^2+y^2=4$
③ $(x-1)^2+y^2=2$　　④ $x^2+(y-4)^2=16$
⑤ $x^2+(y-1)^2=2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0) 이고,
선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점은 (−1, 0) ,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x-1)^2+y^2=4$

16. 두 정점 A$(0,0)$, B$(0,3)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P(x,y) 의 자취는?

① $x^2+(y-4)^2=4$ ② $x^2+(y+4)^2=4$
③ $(x-4)^2+y^2=4$ ④ $(x+4)^2+y^2=4$
⑤ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$

해설

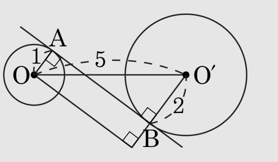
$\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$
즉 $4\overline{PB}^2=\overline{PA}^2$ 이므로
$4\left\{x^2+(y-3)^2\right\}=x^2+y^2$
$3x^2+3y^2-24y+36=0$
$\therefore x^2+(y-4)^2=4$

17. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O′의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O′B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AO} = \overline{BH} = 1$

$\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$

이때, 두 원의 중심거리가 5이므로

$\triangle OHO'$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

18. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10-1} = 3$

19. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

20. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f\ :\ (x,\ y) \to (x - a,\ y - 1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y + 1) = (x + a)^2 - 2(x + a)$
$y = x^2 + (2a - 2)x + a^2 - 2a - 1$
이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로
y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면
$x^2 + (2a - 4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고
이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.
두 교점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$ 라 하면
$x_1 + x_2 = -(2a - 4)$
$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a - 4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

21. 점 $(a,\ 5)$ 가 곡선 $y = 2x^2 - 2x + 1$ 의 위 또는 윗부분에 있을 때, 상수 a 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점$(a,\ 5)$ 가 부등식 $y \geq 2x^2 - 2x + 1$ 이 나타내는 영역에 포함되어야 한다.

$5 \geq 2a^2 - 2a + 1,\ 2a^2 - 2a - 4 \leq 0$

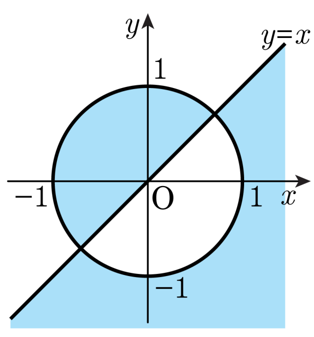
$a^2 - a - 2 \leq 0,\ (a+1)(a-2) \leq 0$

$\therefore\ -1 \leq a \leq 2$

a 의 최댓값은 2 이고, 최솟값은 -1 이다.

$\therefore\ 2 + (-1) = 1$

22. 다음 그림의 색칠된 부분을 부등식으로 바르게 나타낸 것은? (단, 경계선의 직선 식은 $y = x$이고 경계선 포함)



① $(x+y)(x^2+y^2-1) > 0$ ② $(x-y)(x^2+y^2-1) \le 0$

③ $(x+y)(x^2+y^2-1) < 0$ ④ $(x-y)(x^2+y^2-1) \ge 0$

⑤ $(x+y)(x^2+y^2+1) > 0$

해설

$x-y = 0$, $x^2+y^2 = 1$ 가 주어진 영역의 경계를 나타내고, 주어진 영역 속의 점 $(2,0)$을 $(x+y)(x^2+y^2-1)$에 대입하면 0 보다 크므로

구하고자 하는 식은 $(x-y)(x^2+y^2-1) \ge 0$ 이다.

23. $|x-2|+|y| \le 2$ 을 만족하는 영역 D의 넓이를 구하여라. 또 이 영역 D 를 만족하는 점 (x, y) 에 대하여 $x-2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 넓이$=8$

▷ 정답 : 최솟값$=-2$

해설

$|x-2|+|y| \le 2$ 의 영역은

i) $x \ge 2, y \ge 0$ 일 때는 $x+y \le 4$

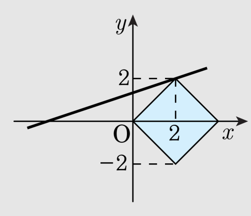
ii) $x \le 2, y \ge 0$ 일 때는 $y \le x$

iii) $x \ge 2, y < 0$ 이면 $x-y \le 4$

iv) $x \le 2, y < 0$ 이면 $y \ge -x$

색칠한 부분의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



$x-2y=k$ 라 하면,

직선이 $(2, 2)$ 를 지날 때

k는 최소가 된다.

$\therefore \quad 2-2 \times 2 = -2 \Rightarrow$ 최솟값 : -2

24. 두 점 $A(2,\ 5)$, $B(7,\ -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0<t<1$)

① $0<t<\frac{1}{3}$ ② $0<t<\frac{3}{5}$ ③ $0<t<\frac{5}{6}$
④ $\frac{3}{5}<t<1$ ⑤ $\frac{3}{5}<t<\frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t:(1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t+(1-t)\cdot 2}{t+(1-t)},\ \frac{-t+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}\right)$$

$\therefore\ P(5t+2,\ -6t+5)$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t+2>0$ 이고 $-6t+5>0$

$\therefore\ -\frac{2}{5}<t<\frac{5}{6}$

이때, $0<t<1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$\therefore\ 0<t<\frac{5}{6}$

25. 원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 둘레를 이등분할 때, a^2 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 4　　④ 8　　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2ax+2y-6=0$ 이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의
둘레를 이등분하려면
두 원의 교점을 지나는 직선이
원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 의 중심을 지나야
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2+2ax+2y-6)-(x^2+y^2+2x-2ay-2)=0$
$2(a-1)x+2(a+1)y-4=0$
$\therefore\ (a-1)x+(a+1)y-2=0\ \cdots$ ㉠
또, 원 $x^2+y^2+2x-2ay-2=0$ 을
표준형으로 바꾸면,
$(x+1)^2+(y-a)^2=a^2+3$ 이므로
중심의 좌표는 $(-1,\ a)$ 이다. 이 때, 직선 ㉠ 이
점 $(-1,\ a)$ 를 지나야 하므로 $-(a-1)+a(a+1)-2=0$
$a^2-1=0$,
$\therefore\ a^2=1$

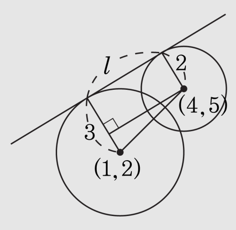
26. 두 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=9,\ (x-4)^2+(y-5)^2=4$ 의 공통접선의 길이는?

① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

두 원의 중심거리와 반지름의 차를 이용하여 구한다.

$\therefore \quad l = \sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2-1^2} = \sqrt{17}$



27. 두 점 A$(-1,3)$, B$(2,a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

두 점 A$(-1,3)$, B$(2,a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y-3=\dfrac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접하므로
원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore\ \dfrac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$

$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9} \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$,$18a=-18$

$\therefore\ a=-1$

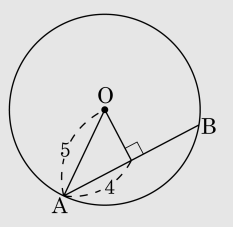
28. $y = x + k$ 가 원 $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$ 에 의해서 잘린 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 값의 합은 ?

① 6　② 9　③ -6　④ -9　⑤ 4

해설

$$\begin{cases} y = x + k \ \cdots ㉠ \\ x^2 + (y+3)^2 = 25 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡의 교점을 A, B 라 하면
$\overline{AB} = 8$, $\overline{OA} = 5$ 이므로
점 O 에서 ㉠에 이르는 거리는 3 이다.



$\dfrac{|3+k|}{\sqrt{1+1}} = 3$, $k^2 + 6k - 9 = 0$

k 값의 합 $\Rightarrow -6$

29. 점 $(1,\ -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3　② -4　③ -5　④ -6　⑤ -7

해설

점 $(1,\ -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1,\ 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$

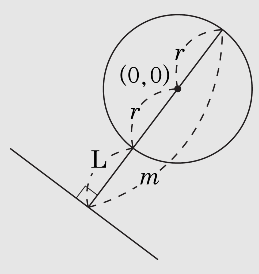
따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.

30. 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y+10=0$ 과의 최소거리와 최대거리의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



먼저 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면

$$\frac{|0\times3+0\times4+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\Rightarrow$ 반지름보다 크므로 위의 그림과 같이
직선이 원 밖에 위치한다.

$\therefore$ 최소거리는 $L=$ 중심사이의 거리-반지름
$=2-1=1$

$\therefore$ 최대거리는 $m=$ 중심사이의 거리+반지름
$=2+1=3$

31. 다음 식이 나타내는 영역의 넓이 중 두 번째로 큰 것은 어느 것인지 구하면?

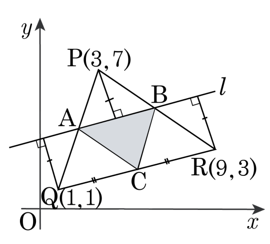
A : $x| \leq 1, |y| \leq 1$,
B : $x^2 + y^2 \leq 1$,
C : $|y| \leq 1 - x^2$,
D : $|x| + |y| \leq 1$

① A　　② B　　③ C
④ D　　⑤ 구할 수 없다.

해설

A 는 $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부
B 는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원의 내부
C 는 포물선 $y = -x^2 + 1$ 의 아랫부분
D 는 $(0,1), (1,0), (-1,0), (0,-1)$ 을 네 꼭짓점으로 하는 마름모의 내부
따라서 두 번째로 큰 것은 B

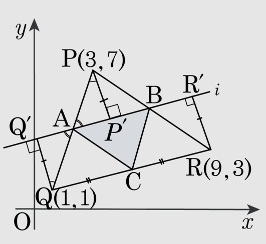
32. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{P}(3,7)$, $\mathrm{Q}(1,1)$, $\mathrm{R}(9,3)$ 으로부터 같은 거리에 있는 직선 l 이 선분 PQ, PR 과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 QR 의 중점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표를 $\mathrm{G}(x,\ y)$ 라 하면 $x+y$ 의 값은?



① $\frac{16}{3}$ ② 6 ③ $\frac{20}{3}$ ④ $\frac{22}{3}$ ⑤ 8

해설

세 점 P, Q, R 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′ 라 하면 $\triangle \mathrm{PAP'} \equiv \triangle \mathrm{QAQ'}$ ($\because$ ASA 합동) 이므로



점 A 는 선분 PQ 의 중점이다.
마찬가지로 점 B 는 선분 PR 의 중점이다.
따라서, 세 점 A, B, C 는 각각 선분 PQ , 선분 PR , 선분 QR 의 중점이므로 $\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle$ABC 의 무게중심을 $\mathrm{G}(x,y)$ 라 하면
$x=\frac{3+1+9}{3}=\frac{13}{3}$, $y=\frac{7+1+3}{3}=\frac{11}{3}$
따라서, $x+y=\frac{13}{3}+\frac{11}{3}=8$

33. 두 점 A$(-5,\ -2)$, B$(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle$ABP 의 무게중심 G 는 중심이 $(a,\ b)$ 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ -1　　⑤ 0

해설

P $=(\alpha,\ \beta)$ 라 하면,

$$\mathrm{G}=\left(\frac{-5+2+\alpha}{3},\ \frac{-2+5+\beta}{3}\right)$$

$$=\left(-1+\frac{\alpha}{3},\ 1+\frac{\beta}{3}\right)$$

$-1+\dfrac{\alpha}{3}=p$,　$1+\dfrac{\beta}{3}=q$ 라 하면,

$\alpha=3p+3,\ \ \beta=3q-3,\quad \alpha^2+\beta^2=9$ 이므로

$\therefore\ \ (3p+3)^2+(3q-3)^2=9$

$\Rightarrow\ \ (p+1)^2+(q-1)^2=1$

$\Rightarrow$　중심이 $(-1,\ 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원

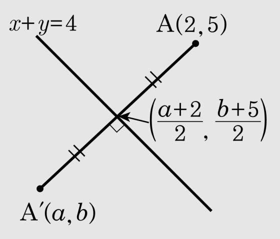
$\therefore\ \ a+b+c=1$

34. 두 점 $\mathrm{A}(2,5)$, $\mathrm{B}(7,0)$ 과 직선 $x+y=4$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값과 이때의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $\sqrt{17}$, P $(2,-1)$ ② $2\sqrt{17}$, P $(3,1)$ ③ $3\sqrt{17}$, P $(5,2)$

④ $4\sqrt{17}$, P $(4,8)$ ⑤ $5\sqrt{17}$, P $(1,2)$

해설



점 $\mathrm{A}(2,5)$ 를 직선 $x+y=4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'(a,b)$ 로 놓으면

선분 AA' 의 중점$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$ 는

직선 $x+y=4$ 위에 있으므로

$\frac{a+2}{2}+\frac{b+5}{2}=4$

$\therefore a+b=1 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 직선 AA' 은 $x+y=4$ 와 수직이므로

$\frac{b-5}{a-2}\cdot(-1)=-1$

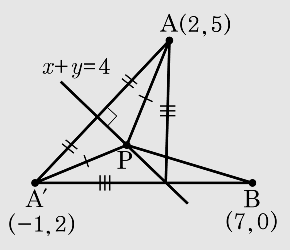
$\therefore a-b=-3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, b=2$

$\therefore \mathrm{A}'(-1,2)$

이때, 다음 그림에서



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} &= \overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \\ &\geq \overline{\mathrm{A'B}} \\ &= \sqrt{(7+1)^2+(0-2)^2} \\ &= \sqrt{68}=2\sqrt{17}\end{aligned}$$

따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{17}$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=2\sqrt{17}$ 일 때의

점 P 는 직선 $\mathrm{A'B}$ 와 직선 $x+y=4$ 의 교점이다.

두 점 $\mathrm{A}'(-1,2)$, $\mathrm{B}(7,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$y-0=\frac{0-2}{7-(-1)}(x-7)$,

$y=-\frac{1}{4}(x-7)$

$\therefore x+4y-7=0$

두 방정식 $x+4y-7=0$, $x+y-4=0$ 을 연립하여 풀면

$x=3, y=1$

$\therefore \mathrm{P}(3,1)$

따라서, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소일 때의 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(3,1)$

35. 연립 부등식 $\begin{cases} -2 \le y \le 2 \\ x \le |y| \le x+2 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $y-x$ 의 최소값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

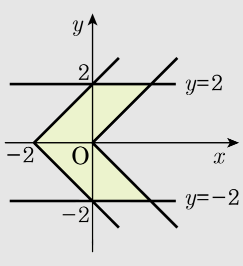
$x \le |y| \le x+2$ 에서

(i) $y \ge 0$ 일 때, $x \le y \le x+2$

(ii) $y < 0$ 일 때, $x \le -y \le x+2$ 이므로

$-x-2 \le y \le -x$

따라서 부등식의 영역은 다음 그림과 같다.



$y-x=k$ 라 하면 직선 $y=x+k$ 가 점 $(2,\ -2)$ 를 지날 때, k (y 절편) 는 최솟값 -4 를 가진다.