1. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c는 실수이다)

보기

㉠ $a > b$이면 $ac > bc$

㉡ $a > b$이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$

㉢ $a > b$이면 $\frac{c^2}{a} > \frac{c^2}{b}$

㉣ $a > b$이면 $a^2 > b^2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉡. $a > b$이면 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$(참)

㉢의 반례 : $a > b$이고 $c = 0$인 모든 실수 (거짓)

㉣. $a > b$이고 $|a| < |b|$인 모든 실수 (거짓)

2. 부등식 $|x-1| < k+1$이 성립하는 실수가 x가 존재하기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k > -1$ ② $k \geq -1$ ③ $k < 0$
④ $k < 1$ ⑤ $k \leq 1$

해설

$|x-1| < k+1$에서 $|x-1| \geq 0$이므로
x가 존재하기 위해서는 $k+1 > 0$이어야 한다.
따라서 $k > -1$

3. 모든 실수 x에 대해 이차부등식$x^2 - x(kx-3) + 3 > 0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2 + 3x + 3 > 0$

$D = 3^2 - 4 \times (1-k) \times 3 < 0$

$\therefore k < \dfrac{3}{12} = 0.25$

최대 정수 $k = 0$

4. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0$, $a \geq 6$, $a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

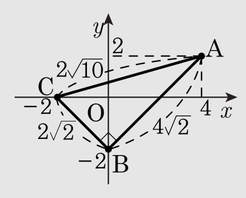
$\therefore k = -6$

5. 세 점 A(4, 2), B(0, −2), C(−2, 0) 을 꼭짓점으로 하는 △ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② 둔각삼각형
③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형
④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설

△ABC 의 세변의 길이를 구하면



$\overline{AB}$

$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로

△ABC 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이다.

6. $\triangle$ABC에서 A(6, 1), B(−1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 $P(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a+1)^2+(b-2)^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{PA}^2 = (2-6)^2+(-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{PA} = 5$

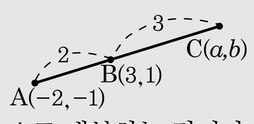
7. 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$ 에 대하여 점 B 의 방향으로 그은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 연장선 위의 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 가 $3\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$ 를 만족할 때, $a+b$ 의 값은?

① 13　　② $\dfrac{27}{2}$　　③ 14　　④ $\dfrac{29}{2}$　　⑤ 15

해설

$3\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : 3$

점 C 는 점 B 의 방향으로 그은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 연장선 위에 있으므로 다음 그림에서 점 B 는 두 점 A, C 를 이은 선분 AC 를 $2:3$ 으로 내분하는 점이다.



즉, $\left(\dfrac{2\cdot a + 3\cdot(-2)}{2+3}, \dfrac{2\cdot b + 3\cdot(-1)}{2+3}\right) = (3, 1)$

$\dfrac{2a-6}{5} = 3,\ \dfrac{2b-3}{5} = 1$

$\therefore\ a = \dfrac{21}{2},\ b = 4$

$\therefore\ a+b = \dfrac{29}{2}$

8. 두 점 $A(-2,\ 0)$, $B(1,\ -1)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　② $P(-1, -1)$　③ $P(0, 0)$
④ $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$　⑤ $P(1, 1)$

해설

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

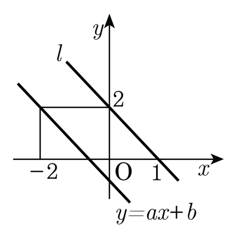
$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= (x+2)^2+y^2+(x-1)^2+(y+1)^2\\ &= 2x^2+2x+2y^2+2y+6\\ &= 2\left(x^2+x\right)+2\left(y^2+y\right)+6\\ &= 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+5\end{aligned}$$

따라서 $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소가 된다.

$\therefore P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

9. 다음 직선 l 과 평행하면서 점 $(-2,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이때, $a + b$ 의 값은 ?



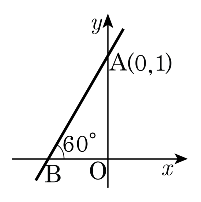
① -4　　② -3　　③ -2

④ -1　　⑤ 0

해설

그림의 직선의 기울기는 -2 이므로
구하는 직선은 기울기가 -2 이고 점 $(-2,\ 2)$ 를 지난다.
$y - 2 = -2(x + 2),\ y = -2x - 2$
$y = -2x - 2,\ a = -2, b = -2$ 이므로,
$\therefore\ a + b = -4$

10. 다음 그림과 같이 점 A$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 $60\,°$ 를 이루고 x 축과 점 B 에서 만날 때, 점 B 의 좌표는?



① $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ② $(-1, 0)$ ③ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

④ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

해설

직선 l 이 x 축의 양의 방향과 $60\,°$ 를 이루므로

직선 l 의 기울기는 $\tan 60\,° = \sqrt{3}$

또한 직선 l 은 점 A$(0,\ 1)$ 을 지나므로

$y - 1 = \sqrt{3}(x - 0)$

$\therefore y = \sqrt{3}x + 1$

이 직선이 x 축과 만나는 점 B 는 y 좌표가 0 이므로

$0 = \sqrt{3}x + 1$

$\therefore x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$

11. 점 A(2, 0) 를 지나고 직선 $y=2x+1$ 에 수직인 직선을 l_1 , 점 B(−4, 0) 를 지나고 직선 $y=2x+1$ 에 수직인 직선을 l_2 라고 할때, 두 직선 l_1 , l_2 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

두 직선 l_1 , l_2 는 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 l_2 위의 한 점 B 와 직선 l_1 사이의 거리와 같다.
직선 l_1 은 직선 $y=2x+1$ 과 수직이고
점A(2, 0) 을 지나므로 직선 l_1 의 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}(x-2)$
$\therefore x+2y-2=0$
따라서, 점 B(−4, 0) 과 직선 l_1 사이의 거리는
$\frac{|-4+0-2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

12. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$
두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

13. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2+y^2-2x+4y+1=0, \quad 3x-4y+6=0$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

따라서, 원의 중심 $(1,-2)$ 에서 직선

$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는

$$d=\frac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

14. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$까지의 거리의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심은 $(0,\ 4)$ 이고, 반지름은 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

따라서 구하는 최소거리는
$d-$(원의 반지름)$=8-5=3$

15. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times4=9$

16. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 양의 방향으로 -1 , y 축의 양의 방향으로 3 만큼 평행이동 하였더니 $y = 2x^2$ 의 그래프와 같을 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

1) x 축 대칭 : y 대신에 $-y$를 대입

$\Rightarrow -y = ax^2 + x + c$

2) x 축으로 -1, y 축으로 3 이동

$\Rightarrow -(y-3) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$

$\Rightarrow y = -ax^2 - (2a+b)x + 3 - a - b - c$

$y = 2x^2$ 과 비교한다.

$\therefore a = -2,\ b = 4,\ c = 1$

$\Rightarrow a + b + c = 3$

17. $(3,\ 1)$ 의 직선 $y = 2x + 3$ 에 대한 대칭점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 는?

① $\frac{4}{5}$　　② 1　　③ $\frac{6}{5}$　　④ $\frac{5}{3}$　　⑤ 2

해설

점 $(a,\ b)$와 $(3,\ 1)$을 지나는 직선은 직선 $y = 2x+3$와 수직이다.

이 직선은 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 로 나타낼 수 있다.

점 $(a,\ b)$는 이 직선 위의 점이므로

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 와 같다.

$\left(a, -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\right)$ 는 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리가

점 $(3, 1)$ 과 직선 $y = 2x + 3$ 과의 거리와 같으므로
점과 직선 사이의 거리에서

$$\frac{|2 \cdot 3 + 3 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2a + 3 + \frac{1}{2}a - \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}$$

$|5a + 1| = 16$

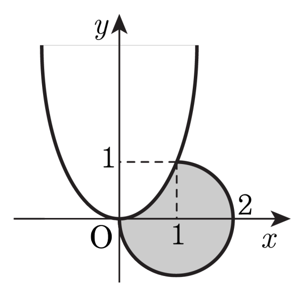
$\therefore\ a = 3$ 또는 $-\frac{17}{5}$

$(3,\ 1)$의 대칭점이 $(a,\ b)$이므로 $a \neq 3$,

$a = -\frac{17}{5}$ 일 때, $b = \frac{21}{5}$

$\therefore\ a + b = \frac{4}{5}$

18. 다음 그림에서 색칠한 부분의 영역을 연립부등식으로 옳게 나타낸 식을 고르면? (단 경계선 포함)



① $\begin{cases} y \geq x^2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} y \geq x^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} y \geq x^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

④ $\begin{cases} y \leq x^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} y \leq x^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

해설

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ 의 내부와 $y = x^2$ 의 아랫부분이므로

$\begin{cases} y \leq x^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

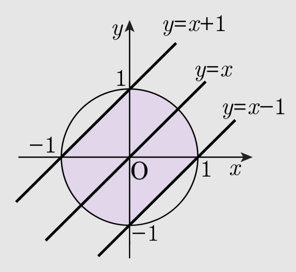
19. $x^2 + y^2 \le 1$인 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 부등식 $\max(x,\ y) + \max(-x,\ -y) \le 1$을 만족하는 영역의 넓이는? (단, $\max(a,\ b)$는 두 수 $a,\ b$중 작지 않은 수를 나타낸다.)

① $\dfrac{\pi}{4}$　　② $\dfrac{\pi}{4}+1$　　③ $\dfrac{\pi}{2}-1$

④ $\dfrac{\pi}{2}+1$　　⑤ $\pi-1$

해설

$\max(x,\ y) + \max(-x,\ -y) \le 1$ ……㉠에서



(i) $x \ge y$일 때, $-x \le -y$이고

$\max(x,\ y) = x,\ \max(-x,\ -y) = -y$이므로

부등식 ㉠은 $x - y \le 1$, 즉, $y \ge x - 1$

(ii) $x < y$일 때, $-x > -y$이고

$\max(x,\ y) = y,\ \max(-x,\ -y) = -x$이므로

부등식 ㉠은 $y - x \le 1$, 즉 $y \le x + 1$

(i), (ii)로부터 부등식 ㉠을 만족하는 영역은

$x \ge y$일 때에는 직선 $y = x - 1$의 윗부분(경계선 포함)이고,

$x < y$일 때에는 직선 $y = x + 1$의 아랫부분(경계선 포함)이다.

따라서, 두 부등식 $x^2 + y^2 \le 1$, $\max(x,\ y) + \max(-x,\ -y) \le 1$을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.

그러므로 구하는 넓이는

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{2} + 1$$

20. 다음 부등식 $-2 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 2$를 만족하는 정수 x, y에 대하여 $x-y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M-m$의 값은 ?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$x-y$의 최댓값은 x가 가장 크고 y는 가장 작을 때 이므로
$x-y=3-(-3)=6$
$x-y$의 최솟값은 x가 가장 작고 y는 가장 클 때 이므로
$x-y=-2-2=-4$
따라서 $M-m=6-(-4)=10$