

1. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2mx - m \geq 0$ 을 만족하는 실수 m 의 범위는 $a \leq m \leq b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$$x^2 - 2mx - m \geq 0 \text{ 이}$$

항상 성립하려면 판별식 $D \leq 0$

$$\frac{D}{4} = m^2 + m \leq 0$$

$$m(m + 1) \leq 0, -1 \leq m \leq 0$$

$$\therefore a + b = (-1) + 0 = -1$$

2. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

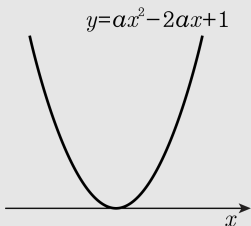
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면

$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0 \text{ 에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 1$

3. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$ 이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$

② $m > 1$

③ $m > -2$

④ $m > 2$

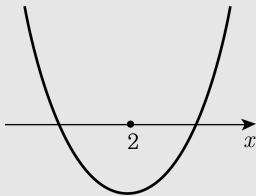
⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크
고 2보다

작은 근을 가지면 $f(2) < 0$

$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$ 이므로 $m > 3$



4. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: m

▷ 정답: 30

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

5. 세 점 $A(0, a)$, $B(b, 2)$, $C(-1, -b)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표가 $(a-4, 1)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -9

② -5

③ 0

④ 9

⑤ 5

해설

$$\frac{0 + b + (-1)}{3} = a - 4, \quad \frac{a + 2 + (-b)}{3} = 1 \text{에서}$$

$$b - 1 = 3a - 12, \text{ 즉 } 3a - b = 11$$

$$a - b + 2 = 3, \text{ 즉 } a - b = 1$$

이 두 식을 연립하여 풀면, $a = 5$, $b = 4$

$$\text{따라서 } a + b = 5 + 4 = 9$$

6. $ab < 0$, $bc < 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제1 사분면

② 제2, 3 사분면

③ 제4 사분면

④ 제3 사분면

⑤ 제3, 4 사분면

해설

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$ab < 0$, $bc < 0$ 이므로 기울기는 양수, y 절편은 양수이다.

$\therefore$ 제4분면은 지나지 않는다.

7. $ax + 8y = 4$, $x + (a + 2)y = -7$ 에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 하나도 없을 때, 실수 a 의 값은?

① $a = -4$, $b = -2$

② $a = -4$, $b = 2$

③ $a = 4$, $b = -2$

④ $a = 4$, $b = 2$

⑤ $a = 1$, $b = -2$

해설

두 직선 $ax + 8y - 4 = 0$, $x + (a + 2)y + 7 = 0$ 이 평행해야 한다.

$$\text{그러므로 } \frac{a}{1} = \frac{8}{a+2} \neq -\frac{4}{7}$$

$$a(a+2) = 8 \quad \left(a \neq -\frac{4}{7}, a \neq -16 \right)$$

$$\therefore a = -4, 2$$

8. 두 직선 $x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점과 직선 $4x + 3y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x - 3y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점은 $(2, 1)$

$\therefore 4x + 3y - 1 = 0$ 까지의 거리 :

$$\frac{|4 \times 2 + 3 \times 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

9. 점 A(7, 7)과 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 4$

② $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$

③ $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 1$

④ $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 1$

⑤ $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$

해설

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면
 $A(7, 7), P(a, b)$ 의 중점의 좌표 $M(x, y)$ 는

$M\left(\frac{a+7}{2}, \frac{b+7}{2}\right)$ 이다.

$$\therefore x = \frac{a+7}{2}, \quad y = \frac{b+7}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 7, \quad b = 2y - 7$$

이 때, 점 P 는 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

위의 점이므로 $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 4$ 가 성립한다.

$$(2x-8)^2 + (2y-8)^2 = 4$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$$

10. 직선 $x + y + k = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ 에 접할 때, 실수 k 의 값은?

① ± 2

② $\pm 2\sqrt{2}$

③ ± 3

④ $\pm 3\sqrt{2}$

⑤ $\pm 5\sqrt{2}$

해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \text{ 은}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

직선 $x + y + k = 0$ 과 원

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$$

가 접하므로

원의 중심과 직선 사이의

거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 한다.

$$\frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$|k| = 2 \quad \therefore k = \pm 2$$

11. 직선 $y = 2x + k$ 와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$ 이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k 의 값은?

① -1

② -4

③ 4

④ 10

⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ 이므로

중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 두 교점 사이의 거리의

최댓값은 직선 $y = 2x + k$ 가 원의 중심 $(2, 0)$ 을 지날 때이므로
 $k = -4$

12. 원 $x^2 + y^2 = 4^2$ 에 접하고, 기울기가 2 인 접선의 방정식이 $y = 2x + a$ 일 때, a 의 값은?

① $\pm \sqrt{5}$

② $\pm 2\sqrt{5}$

③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 4\sqrt{5}$

⑤ $\pm 5\sqrt{5}$

해설

기울기 m 일 때, 원의 접선 구하는 공식

$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ 에 의해

$$y = 2x \pm 4\sqrt{1+2^2}$$

$$\therefore y = 2x \pm 4\sqrt{5}$$

13. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$ 의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

14. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$$

(x 축으로 4만큼 평행이동)

$$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$$

($y = x$ 에 대칭이동)

$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(a-2)^2 + a^2} = 2$$

$$2a^2 - 4a + 4 = 4,$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a = 2$ 를 대입하면

구하는 점의 좌표 $(p, q) = (-2, 0)$

$$\therefore p^2 + q^2 = 4$$

15. 직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 있다. 이 직선에서 점 $(1, 1)$ 까지의 거리가 2 일 때, 상수 k 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -34

해설

직선 $5x + 12y + k = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 직선의 방정식은 $5y + 12x + k = 0$

즉, $12x + 5y + k = 0$

이 직선과 점 $(1, 1)$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + k|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 2$$

$$\frac{|17 + k|}{13} = 2$$

$$|k + 17| = 26$$

$$k + 17 = \pm 26$$

$$\therefore k = 9 \text{ 또는 } k = -43$$

따라서, 구하는 상수 k 의 모든 값의 합은

$$9 + (-43) = -34$$

16. 점 $(1, 2)$ 를 직선 $y = 2x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, 실수 a, b 에 대하여 $5(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1, 2), (a, b)$ 를 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2} \right)$$

이 점이 직선 $y = 2x + 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2} = 2 \cdot \frac{1+a}{2} + 1$$

$$\therefore 2a - b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또한, 두 점 $(1, 2), (a, b)$ 를 지나는 직선이

직선 $y = 2x + 1$ 과 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{5}, b = \frac{12}{5}$$

$$\text{따라서, } 5(a+b) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{12}{5} \right) = 5 \cdot \frac{13}{5} = 13$$

17. 두 부등식 $y \geq x$, $x^2 + y^2 < 25$ 을 동시에 만족시키는 영역에 점 $(3, k)$ 이 속하기 위한 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k \geq 3$

② $k \leq 4$

③ $3 < k < 4$

④ $3 < k \leq 4$

⑤ $3 \leq k < 4$

해설

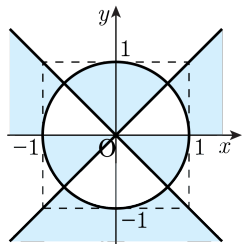
(i) $(3, k)$ 이 $y \geq x$ 을 만족해야 하므로 $k \geq 3$

(ii) $(3, k)$ 가 $x^2 + y^2 < 25$ 을 만족해야하므로

$$3^2 + k^2 < 25, \therefore -4 < k < 4$$

(i), (ii)에서 $3 \leq k < 4$

18. 다음 그림의 어두운 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선 포함)



- ① $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$
 ② $x(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$
 ③ $x(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$
 ④ $y(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$
 ⑤ $y(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$

해설

주어진 그림에서 경계선은 직선

$y = x$, $y = -x$ 와

원 $x^2 + y^2 = 1$ 및 x 축($y = 0$)이다.

따라서, $f(x, y) = y(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1)$ 로 놓고

주어진 영역에 속하는점 $(2, 1)$ 을 대입하면

$f(2, 1) = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 - 12 > 0$ 이다.

이때, 경계선을 포함하므로 구하는 부등식은

$y(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$

19. 좌표평면 위에서 $y \leq |x|$ 와 $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ 을 동시에 만족하는 점 (x, y) 가 나타내는 영역의 넓이는?

① π

② 2π

③ 3π

④ 4π

⑤ 5π

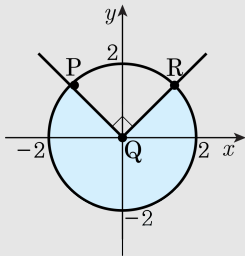
해설

부등식 $y \leq |x|$ 의 영역과

부등식 $x^2 + y^2 \leq 4$ 의 영역의 공통 부분이다.

이때, $\angle PQR$ 가 나타내는 작은 쪽의 각의 크기는 90° 이므로

어두운 부분의 넓이는 $\pi \times 2^2 \times \frac{3}{4} = 3\pi$



20. $e + 2f - 10 \geq 0$ 를 만족하는 $P(e, f)$ 에 대하여 $e^2 + f^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$e^2 + f^2 = k^2$ 라 놓으면, 이 원이 직선과 접할 때 k^2 가 최소가 된다.

$(0, 0)$ 에서 직선 $e + 2f - 10 = 0$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|0 + 2 \cdot 0 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

그러므로 최솟값은 $k^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$

