1. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2+(k+2)x+2k+1>0$ 이 성립하도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $-1<k<2$ ② $0<k<4$ ③ $1<k<2$
④ $1<k<4$ ⑤ $-1<k<4$

해설

판별식 D 가 $D<0$ 이어야 하므로
$D=(k+2)^2-4(2k+1)<0$, $k^2-4k<0$,
$k(k-4)<0$
$\therefore 0<k<4$

2. 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-3<x<2$일 때, $bx^2-ax+c<0$의 해를 구하면$x<\alpha,\ x>\beta$이다. $2\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$-3<x<2 \Leftrightarrow (x-2)(x+3)<0$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0$

$\therefore\ -x^2-x+6>0\cdots\cdots$ ①

①의 좌변과 ax^2+bx+c의 각 항의 계수의 비가 일정해야 하므로 같게 놓아도 무방하다.

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=6$

이것을 $bx^2-ax+c<0$에 대입하면

$-x^2+x+6<0$

$\therefore\ x^2-x-6>0 \quad (x+2)(x-3)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>3$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=3 \quad \therefore\ 2\alpha+\beta=-1$

3. 이차방정식 $x^2+ax-2=0$ 의 두 실근 α, β에 대하여 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-\frac{13}{3}<a<-1$　② $-\frac{10}{3}<a<0$　③ $-\frac{7}{3}<a<1$
④ $-\frac{5}{3}<a<2$　⑤ $-\frac{2}{3}<a<3$

해설

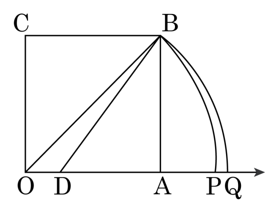
$f(x)=x^2+ax-2$ 로 놓으면 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이므로
$f(-2)>0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(3)>0$ 이어야 한다.
$f(-2)=-2a+2>0$ 에서 $a<1$
$f(0)=-2<0$
$f(1)=a-1<0$ 에서 $a<1$
$f(3)=3a+7>0$ 에서 $a>-\frac{7}{3}$
$\therefore\ -\frac{7}{3}<a<1$

4. 세 점 A$(2, -3)$, B$(-1, 0)$, C$(1, 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형
③ $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형
④ $\angle A=90°$인 직각삼각형
⑤ $\angle B=90°$인 직각삼각형

해설
$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=26=\overline{AC}^2$이므로
$\angle B=90°$인 직각삼각형이다.

5. 다음 그림과 같이 반직선 OA 와 한 변의 길이가 4 인 정사각형 OABC 가 있다. 점 O 를 중심으로 하고 선분 OB 를 반지름으로 하는 원이 반직선 OA 와 만나는 점을 P , 선분 OA 를 1 : 3 으로 내분하는 점 D 를 중심으로 하고 선분 DB 를 반지름으로 하는 원이 반직선 OA 와 만나는 점을 Q 라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2$ 의 값은?



① 52　② 56　③ 60　④ 64　⑤ 68

해설

$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OD}} = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{OA}} = 1,\ \overline{\mathrm{DA}} = 3,\ \overline{\mathrm{DB}} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ 이므로,

$\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OD}} + \overline{\mathrm{DB}} = 1 + 5 = 6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{OQ}}^2 = 32 + 36 = 68$

6. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{-3-2}{3-0} = \dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow \quad a = 7$

7. 직선 $ax + y - 1 = 0$이 직선 $2x + by - 5 = 0$에 평행하고, 직선 $x + (a-1)y - 3 = 0$에 수직일 때, $2a + b$의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

두 직선이 평행하면 기울기가 일치한다.

$\Rightarrow \ -a = -\frac{2}{b} \ \cdots$ ㉠

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1이다.

$\Rightarrow \ -a \times -\frac{1}{(a-1)} = -1 \ \cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡를 연립하면, $a = \frac{1}{2} \ \ b = 4$

$\therefore \ 2a + b = 5$

8. 세 직선 $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x+y=k \\ kx-5y=5 \end{cases}$ 이 한점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에서 만날 때 $a+b$ 의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3x+y=7\ \cdots$ ㉠
$2x+y=k\ \cdots$ ㉡
$kx-5y=5\ \cdots$ ㉢

㉠과 ㉡의 교점은 $(7-k,\ -14+3k)$ 이므로
이를 ㉢에 대입하면,
$k^2+8k-65=0 \quad \therefore\ k=5$ 또는 -13
$\therefore\ \mathrm{P}(a,\ b)=(2,\ 1)$ 또는 $(20,\ -53)$
$\therefore\ a+b$ 의 최댓값은 $2+1=3$

9. 두 직선 $2x-y+3=0, x-2y+2=0$의 교점과 점 $(-3, 0)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x+5y+3=0$　　② $-x+5y-3=0$

③ $2x+5y+6=0$　　④ $-x+3y-3=0$

⑤ $x+3y+3=0$

해설

$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 2-2y+2=0 \end{cases}$ 의 연립방정식을 풀면

$x=-\frac{4}{3}\ \ y=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right),\ (-3, 0)$을 지나는 직선

$y=\left(\dfrac{0+\frac{1}{3}}{-3+\frac{4}{3}}\right)(x+3)$

$\therefore\ 5y-x-3=0$

10. 두 직선 $3x+4y=24$와 $3x+4y=4$사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$의 점 $(0,6)$

$$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

11. 점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

② $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 또는 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

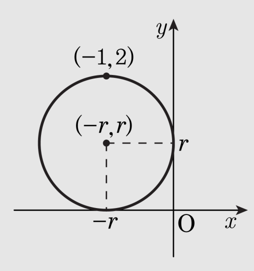
③ $(x-3)^2+(y-3)^2=3$ 또는 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

④ $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 또는 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=5$ 또는 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

해설

점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.



따라서, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$이므로

구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$으로 놓을 수 있다.

이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$

$\therefore r=1$ 또는 $r=5$

12. 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 1$ 을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 의 자취의 방정식을 구하면 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이다. 이때, $a+b+r$ 의 값은? (단, $r>0$)

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(x+3)^2+y^2=4\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$

$3x^2+3y^2-30x+27=0,\ (x-5)^2+y^2=16$

$\therefore a=5,\ b=0,\ r=4$

$\therefore a+b+r=5+0+4=9$

13. x축 및 y축에 접하고 원 $(x-7)^2+(y-6)^2=4$에는 외접하는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 합은?

① 25　② 27　③ 30　④ 32　⑤ 35

해설

조건을 만족시키는 원은 제 1 사분면에
존재하므로, 원의 반지름을 a라 하면
중심의 좌표는 (a, a)가 된다.
주어진 원과 외접하기 위해서는 중심거리가
반지름의 합과 같아야 하므로
$\sqrt{(7-a)^2+(6-a)^2}=a+2$
$\therefore a^2-30a+81=0$
$\therefore$ (두 근의 합)=30

14. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow \ (x+2)(x+8) = 0$
$\Rightarrow \ x = -2, \ -8$
$\therefore$ x 축 위의 교점 : $(-8, \ 0), \ (-2, \ 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

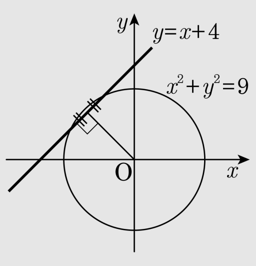
15. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$
이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을
수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,
현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

16. 직선 $y = ax + b$ 를 평행이동 $f\ :\ (x,\ y)\ \rightarrow\ (x-1,\ y+2)$ 에 의하여 옮겼더니 직선 $y = 2x + 3$ 과 y축 위에서 직교할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = ax + b$ 의 x , y 대신에 각각 $x + 1$, $y - 2$ 를 대입하면
$y - 2 = a(x + 1) + b$
$\therefore y = ax + a + b + 2$
이 직선과 직선 $y = 2x + 3$ 이 y 축 위에서 직교하므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, $(0,\ 3)$ 을 지난다.
$a \times 2 = -1$, $a + b + 2 = 3$
연립하여 풀면
$a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$
$\therefore a - b = -2$

17. 두 점 A$(-6,\ 1)$, B$(2,\ 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = -3$

해설

두 점 A 와 B 가 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 $(-2,\ 3)$ 은 직선
$y = ax + b$ 위에 있다.
$\therefore\ 3 = -2a + b\ \cdots$ ㉠
또한, 직선 AB 와 직선 $y = ax + b$ 가
서로 수직이므로
($\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기) $\times a = -1$ 에서
$\dfrac{5-1}{2-(-6)} \times a = -1$
$\therefore\ a = -2$ $a = -2$ 를 ㉠ 에 대입하면
$b = -1$ $\therefore\ a + b = -3$

18. 점 $(k,\ -2)$ 이 부등식 $x^2+y^2 \le 9$ 의 영역 안에 있을 때 k 의 최댓값과 최솟값의 차는?

① 2　　② $2\sqrt{3}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ 5　　⑤ 6

해설

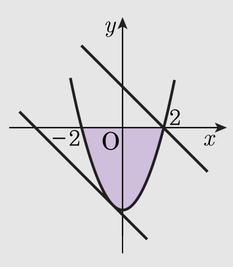
점 $(k,\ -2)$ 가 부등식 $x^2+y^2 \le 9$ 을 만족하여야 하므로,
$k^2+(-2)^2 \le 9,\ k^2 \le 5$
$\therefore\ -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $2\sqrt{5}$ 이다.

19. 다음 연립 부등식 $y \geq x^2-4$, $y \leq 0$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \cdot m$ 의 값은?

① -13　② $-\frac{13}{2}$　③ $-\frac{13}{4}$　④ $-\frac{17}{2}$　⑤ $-\frac{17}{4}$

해설

$x+y=k$ 라 하면
직선 $y=-x+k$ 가
점 $(2,\ 0)$ 를 지날 때, k 의 최댓값 M은 2 이고,
$y=x^2-4$ 와 접할 때, k는 최소이므로
$x^2-4=-x+k$, $x^2+x-4-k=0$
$D=1+4(4+k)=0$
k의 최솟값 $m=-\frac{17}{4}$
따라서 $M \cdot m=-\frac{17}{2}$



20. $x^2+y^2 \le -2x+2y-1$를 만족하는 점 $(x,\ y)$가 있다. 원점을 O 라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최솟값과 최댓값의 합은?

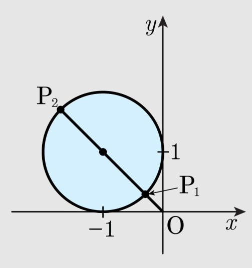
① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^2+y^2 \le -2x+2y-1$, $x^2+y^2+2x-2y+1 \le 0$

$(x+1)^2+(y-1)^2 \le 1$ 이므로

이것은 점 $(-1,\ 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원의 경계와 내부이다.



이때, $\overline{\mathrm{OP}}$ 가 최대, 최소가 되는 경우는 원점과 원의 중심을 연결한 직선이 원과 만나는 경우이다.

원점 O 에 가까운 점 P_1 이 최솟값을 가질 때의 점이고 최솟값은 $\overline{\mathrm{OC}}-r=\sqrt{2}-1$

원점 O 에서 먼쪽의 점 P_2 가 최댓값을 가질 때의 점이고 최댓값은 $\overline{\mathrm{OC}}+r=\sqrt{2}+1$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2\sqrt{2}$ 이다.