1. 이차부등식 $[x]^2+[x]-12 \le 0$의 해가 $a \le x < b$일 때, $a+b$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$[x]^2+[x]-12 \le 0$에서

$([x]+4)([x]-3) \le 0$

$\therefore -4 \le [x] \le 3$

$x = -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$\therefore -4 \le x < 4$

따라서 $a=-4,\ b=4$이므로 $a+b=0$이다

2. 모든 실수 x에 대하여 $(a^2-1)x^2-(a-1)x+1>0$이 성립할 때 a의 범위를 구하면?

① $a<-\frac{2}{3},\ a\geq 1$　② $-1<a<1$　③ $a<-1,\ a>1$
④ $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$　⑤ $-\frac{5}{3}<\ a<1$

해설

(1) $a=1$일 때
(좌변)$=1>0$이므로 항상 성립한다.
(2) $a\neq 1$일 때
주어진 식이 성립하려면
$a^2-1>0,\ D<0$이어야 한다.
따라서 $a^2-1>0$에서 $(a-1)(a+1)>0$
$\therefore\ a<-1,\ a>1$
또 $D=(a-1)^2-4(a^2-1)<0$에서
$3a^2+2a-5>0,\ (3a+5)(a-1)>0$
$\therefore\ a<-\frac{5}{3},\ a>1$
(1), (2)에서 $a<-\frac{5}{3},\ a\geq 1$

3. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab = 6$

해설

$ax^2 + 5x + b > 0$ ······㉠
해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3) < 0$ 전개하면
$x^2 - 5x + 6 < 0$ ······㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2 + 5x - 6 > 0$ ······㉢
㉠,㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

4. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을
α, β라 하면, $\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha$, $2x+1=\beta$이므로
$x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
따라서, $\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}$
$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$\therefore$ $f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

5. 이차함수 $y = x^2 - 2x$의 그래프가 직선 $y = a$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위가 $-1 < x < b$일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① 3　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 9

해설

$x^2 - 2x < a$ 에서 $x^2 - 2x - a < 0 \cdots$ ㉠
한편, 해가 $-1 < x < b$이고
이차항의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+1)(x-b) < 0$
$\therefore x^2 + (1-b)x - b < 0$ 이
부등식 ㉠과 일치해야 하므로
$1 - b = -2$, $a = b$
따라서 $a = 3$, $b = 3$이므로 $ab = 9$

6. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + 2x + 3$ 의 그래프가 항상 직선 $y = kx + 2$ 의 위쪽에 있을 때, 정수 k 의 개수를 구하면?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

이차함수의 그래프가 항상
직선의 위쪽에 있으므로
$x^2 + 2x + 3 > kx + 2$, $x^2 + (2 - k)x + 1 > 0$
모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로
$D = (2 - k)^2 - 4 < 0,\ k(k - 4) < 0$
$\therefore\ \ 0 < k < 4$
따라서 정수 k 는 1, 2, 3 의 3 개이다.

7. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-3x-4 \le 0 \\ 2x^2-5x<3 \end{cases}$ 의 해 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x^2-3x-4 \le 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 4 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2-5x<3 \Leftrightarrow 2x^2-5x-3<0$

$\Leftrightarrow (2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $-\frac{1}{2}<x<3$

따라서, 정수인 것은 0, 1, 2로 3 개다.

8. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$ ② $-1 \le k \le 2$ ③ $-5 \le k \le -2$

④ $-7 < k \le -1$ ⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1 보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면

(i) $D \ge 0$ 이므로

$k^2+k-6 \ge 0$

$(k+3)(k-2) \ge 0$

$\therefore k \le -3, k \ge 2$

(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서

$-k > 1$

$\therefore k < -1$

(iii) $f(1) > 0$ 이므로

$1+2k+6-k > 0$

$\therefore k > -7$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7 < k \le -3$

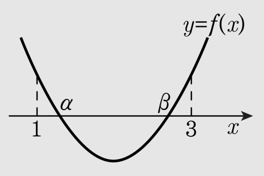
9. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

10. 두 점 $\mathrm{A}(-2, 1)$, $\mathrm{B}(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$　② $\left(0, \frac{5}{2}\right)$　③ $\left(0, \frac{9}{2}\right)$
④ $\left(0, \frac{13}{2}\right)$　⑤ $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

해설

y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\sqrt{\{0-(-2)\}^2 + (a-1)^2}$
$= \sqrt{(0-4)^2 + (a-5)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2 - 2a + 5 = a^2 - 10a + 41$
$8a = 36$
$\therefore a = \frac{9}{2}$
따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$이다.

11. 직선 $y = 2x$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(2, 0)$, $\mathrm{B}(3, 1)$에서 같은 거리에 있는 점을 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$라고 할 때, $\alpha\beta$를 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로P $(\alpha, 2\alpha)$라 하면

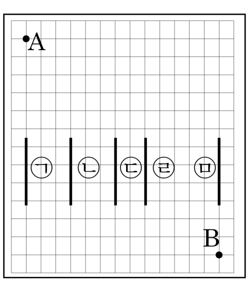
$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha - 2)^2 + (2\alpha)^2 = (\alpha - 3)^3 + (2\alpha - 1)^2$

$-4\alpha + 4 = -6\alpha - 4\alpha + 10$

$\therefore\ \alpha = 1,\ \ \beta = 2$

12. 다음 그림은 어느 운동장에 있는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ 5개의 평균대를 모눈종이에 나타낸 것이다. 동현이가 A 지점에서 출발하여 평균대 위를 걸어서 지나 B 지점까지 도착하는 경기를 하려 한다. 이동 거리를 가장 짧게 하려 할 때, 지나야할 평균대는?

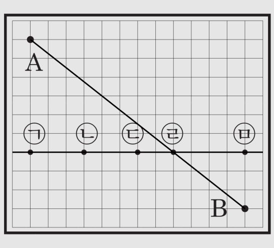


① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

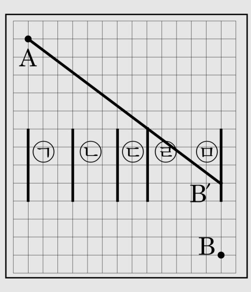
④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

각 평균대의 한 끝점을 다른 한 끝점에 오도록 접으면 다음 그림과 같으므로 $\overline{AB}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣을 걸어서 지날 때 이동거리가 가장 짧다.



평행사변형의 성질을 이용하여 그림과 같이 B 지점에서 위로 4 칸 이동한 지점 B′ 을 잡으면 이동 거리는 A 지점에서 B′ 지점까지 이동한 후 B′ 지점에서 B 지점까지 이동하는 거리와 같다.
이동 거리가 가장 짧은 것은 $\overline{AB'}+\overline{B'B}$ 이므로 $\overline{AB'}$ 위에 끝점이 있는 평균대 ㉣ 을 지나야 한다.



13. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답： ______ m

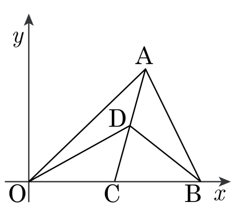
▷ 정답： 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

14. 좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(2, 2), B(3, 0)이있다. 선분 OB 위의 점 C 와 선분 AC 위의 점 D 에 대하여 4 개의 삼각형 OAD, OCD, ABD, BCD 의 넓이가 모두 같을 때, 점 D 의 x 좌표와 y 좌표의 합을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2.75

해설

$\triangle$OCD 와 $\triangle$BCD 의 넓이가 같으므로

$\overline{OC} : \overline{BC} = 1 : 1$

즉, 점 C 는 선분 OB 의 중점이고,

$C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

또, $\triangle$OAD 와 $\triangle$OCD 의 넓이가 같으므로

$\overline{CD} : \overline{AD} = 1 : 1$

즉, 점 D 는 선분 AC 의 중점이므로,

$D\left(\frac{7}{4}, 1\right)$

따라서, 점 D 의 x 좌표와 y 좌표의 합은

$\frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4} = 2.75$

15. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(-3,-3)$, $\mathrm{B}(3,-3)$, $\mathrm{C}(3,5)$, $\mathrm{D}(-3,5)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점 E의 좌표는?

① $(-4,0)$　② $(0,1)$　③ $(0,2)$　④ $(1,2)$　⑤ $(4,3)$

해설

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 그리면
대각선의 교점은 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이다.

$$\left(\frac{-3+3}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)=(0,1)$$

따라서 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은
항상 $(0,1)$을 지난다

16. 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 를 $2:1$ 로 외분한 점을 각각 P, Q, R 이라 할 때, 세 점의 좌표는 P$(-2,\ 3)$, Q$(3,\ 2)$, R$(-1,\ -2)$ 이다. 이 때, 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

① $(1,\ 0)$ ② $(0,\ 1)$ ③ $(-1,\ 0)$
④ $(0,\ -1)$ ⑤ $(0,\ 0)$

해설

$\triangle$ABC 의 세 변 AB, BC, CA 를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$ 으로 내분(외분)한 점을 각각 P, Q, R 이라 하면
$\triangle$PQR 의 무게중심은 $\triangle$ABC 의 무게중심과 같다.
$\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{-2+3-1}{3},\ \frac{3+2-2}{3}\right)=(0,\ 1)$ 이므로
$\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표도 $(0,\ 1)$ 이다.

17. x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45\degree$ 이고, 점 $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선이 점 $(a,\ 7)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

x 축 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45\degree$ 인 직선의 기울기는 1 이다.
$(-1,\ 2)$ 를 지나므로, 직선의 방정식은
$y=(x+1)+2=x+3$
$(a, 7)$ 을 대입하면, $7=a+3,\quad a=4$

18. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0,\frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $a=2$

19. 세 점 $(0, 2)$, $(3, -3)$, $(-3, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: $a = 7$

해설

세 점이 한 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow \dfrac{-3-2}{3-0} = \dfrac{a-(-3)}{-3-3}$

$\Rightarrow a = 7$

20. 다음 두 직선 $y=(2a+1)x-a+2$, $y=(a+2)x+2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$(2a+1)(a+2)=-1$

$2a^2+5a+3=0$

$(2a+3)(a+1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $-\frac{3}{2}$

21. 두 직선 $3x+2y+1=0$과 $2x-y+10=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+3y-3=0$에 수직인 직선의 방정식은 $y=mx+n$이다. $m+n$의 값은?

① -16　② -10　③ 0　④ 16　⑤ 10

해설

$3x+2y+1=0,\ 2x-y+10=0$을 연립하여 풀면,

$x=-3,\ y=4$

또 $x+3y-3=0$의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로,

$\therefore\ m=3$

$y-4=3(x+3)$

즉 $y=3x+13$　$\therefore n=13$

따라서 $m+n=3+13=16$

22. 두 직선 $x-y+3=0$, $2x-y=0$의 교점을 지나고 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $3x-y-3=0$ ② $3x+y+3=0$ ③ $3x-y+3=0$
④ $x+3y+3=0$ ⑤ $3x+y-3=0$

해설

두 직선의 교점을 연립방정식을 풀어 계산하면
교점은 $(3,\ 6)$, $(1,\ 0)$을 지나므로 직선의 방정식은
$y=\frac{6-0}{3-1}(x-1)$
$\therefore\ y=3x-3$

23. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면
$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1-y) = 0$
k에 관한 항등식이므로
$x+2 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0,\ 1 - y = 0$
$\therefore x = -2,\ y = 1$
$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$
$\therefore\ a = -2,\ b = +1$
$\therefore\ a + b = -1$

24. 세 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0, 4)$, $\mathrm{C}(-1,\ 2)$ 에 대하여 점C 에서 직선AB 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{CH}$ 의 길이는?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $\sqrt{5}$　　⑤ 3

해설

직선 AB 의 방정식은 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 이다.

$\therefore\ 4x+3y-12=0$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CH}}=\frac{|4\times(-1)+3\times 2-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-4+6-12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$

25. 두 직선 $3x+4y=24$ 와 $3x+4y=4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$ 의 점 $(0,6)$

$$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

26. 점 $(3,\ 4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{|2\times 3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

27. 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나고, x 축에 접하는 원은 2개가 있다. 이 때, 두 원의 반지름의 합은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

x 축에 접하는 원의 방정식을 표현하면,
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나므로 각각 대입하면,
$(1-a)^2+(4-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉠
$(3-a)^2+(2-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면,
$a=1, b=2$ 또는 $a=9,\ b=10$
$\therefore$ 두 원의 반지름의 합은 $10+2=12$

28. 좌표평면 위에 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 가 있다. 이 원에 접하는 접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점을 P 라 할 때, 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

① 4π　② $5\sqrt{2}\pi$　③ $6\sqrt{2}\pi$　④ $7\sqrt{3}\pi$　⑤ 8π

해설

원 $(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 에 접하는
접선들 중에서 서로 수직이 되는 두 직선의 교점은
원의 중심으로부터의 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다.
따라서 점 P 의 자취는 $6\sqrt{2}\pi$

29. 두 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, $x^2+y^2=r^2$ 의 위치 관계가 내접하도록 하는 상수 r 의 값을 구하여라. (단, $r>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 원을
$C_1 : (x-3)^2+(y-4)^2=9 \leftarrow$ 중심 $(3,4)$
$C_2 : x^2+y^2=r^2(r>0) \leftarrow$ 중심 $(0,0)$
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 $3, r$ 이고, 중심거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이다.
이 때, $|r-3|=5$ 이어야 하므로 $r-3=\pm5$
$\therefore r=8(\because r>0)$

30. 두 원 $x^2 + y^2 - x - 2y - 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1, 0), (-1, 2)$　　② $(-2, 1), (0, 2)$

③ $(1, 2), (4, -2)$　　④ $(4, 2), (-3, 5)$

⑤ $(-6, 7), (-8, 4)$

해설

공통현의 방정식은

$(x^2 + y^2 - x - 2y - 2) - (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3) = 0$ 에서 $x = -1$

공통현의 방정식 $x = -1$ 을

$x^2 + y^2 - x - 2y - 2 = 0$ 에 대입하면

$(-1)^2 + y^2 - (-1) - 2y - 2 = 0$

$y^2 - 2y = 0$

$y(y - 2) = 0$

$\therefore y = 0$ 또는 $y = 2$

따라서, 구하는 교점의 좌표는 $(-1, 0)$, $(-1, 2)$

31. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$

④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 1 - 25 < 0$, $m^2 - 24 < 0$
$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$
$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

32. 원 $x^2+y^2=2$ 와 직선 $y=-x+k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k<0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=-2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 접하려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.
$\Rightarrow$ 중심 : $(0,\ 0)$ 직선 : $x+y-k=0$
$\dfrac{|1\times0+1\times0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ $k=\pm2$
$\therefore$ $k=-2$ ($\because$ $k<0$)

33. $x^2 + y^2 = r^2, r > 0,\ (x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상일 때, r의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

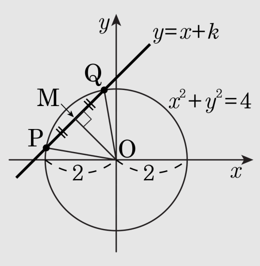
원 $x^2 + y^2 = r^2$의 중심은 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 r이고,
원 $(x-1)^2 + \left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1$의 중심은 $\left(1, -2\sqrt{2}\right)$, 반지름의 길이는 1이다.
이 때, 두 원의 중심사이의 거리는
$\sqrt{1^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = 3$이고,
두 식을 동시에 만족하는 x가 최소한 1개 이상이므로 두 원은 만난다.
즉, $r - 1 \le 3 \le r + 1 \quad \therefore 2 \le r \le 4$
따라서, r의 최댓값은 4, 최솟값은 2이므로 그 합은 $4 + 2 = 6$

34. 직선 $y = x + k$가 원 $x^2 + y^2 = 4$에 의하여 잘린 현 $\overline{PQ}$의 길이가 2일 때, k의 값은?

① $\pm\sqrt{5}$　　② $\pm\sqrt{6}$　　③ $\pm\sqrt{7}$

④ $\pm 2\sqrt{2}$　　⑤ ± 3

해설



$\overline{PQ} = 2$이므로 $\overline{PQ}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{PM} = 1$

원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{OP} = 2$

따라서 $\overline{OM} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PM}^2}$

$= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

이때 원과 직선 $x - y + k = 0$

사이의 거리는 $\overline{OM}$의 길이와 같으므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$, $|k| = \sqrt{6}$, $k = \pm\sqrt{6}$

35. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

36. 다음 <보기> 중에서 점 $(2,\ 1)$ 에서 원 $x^2+y^2=4$ 에 그은 접선의 방정식을 모두 고르면?

보기

㉠ $2x+y=4$	㉡ $x=2$
㉢ $3x+4y=10$	㉣ $3x-4y=2$

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉣

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고
점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은
$y=m(x-2)+1=mx-2m+1$
$\therefore mx-y-2m+1=0\ \cdots$ ㉮
원의 중심 $(0,\ 0)$ 과 직선 ㉮ 사이의 거리가
원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로
$\dfrac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, |-2m+1|=2\sqrt{m^2+1}$
양변에 제곱을 하여 정리하면
$4m^2-4m+1=4m^2+4,$
$m=-\dfrac{3}{4}$ 을 ㉮ 에 대입하여 정리하면
$3x+4y-10=0$
한편, 점 $(2,\ 1)$ 에서
원 $x^2+y^2=4$ 에 그은 접선 중
y 축과 평행한 접선을 가지므로 $x=2$

37. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$x^2+y^2-8x-6y+21=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=2^2$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$ $\quad \sqrt{4^2+3^2}+2=7$

38. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

39. 직선 $ax+by+c=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 직선 $3x-4y+2=0$ 과 수직이 되었다. 이 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $\frac{8a}{3b}$ 의 값은?(단, $ab \neq 0$)

① $-\frac{32}{9}$　② -2　③ 2　④ 4　⑤ $\frac{32}{9}$

해설

$y=x$ 대칭시키면 직선은

$bx+ay+c=0 \Rightarrow \quad y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$,

$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ 과 수직이 되려면,

$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ 가 되어야 한다.

$\therefore \quad \frac{8a}{3b}=\frac{8}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)=2$

40. 좌표평면 위의 점 P 를 y 축에 대하여 대칭이동 하고 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 원래의 점 P 가 되었다. 점 P 의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$　③ $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}\right)$　⑤ $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

해설

$P=(x,y)$ 라 하면,

$(x,y) \xrightarrow{y\text{축 대칭}}$

$(-x,y) \xrightarrow{x\text{축으로 2, } y\text{축으로 3만큼 평행이동}}$

$(-x+2,\ y+3) \xrightarrow{y=x\text{에 대칭}} (y+3, -x+2)$

$\Rightarrow \quad (y+3, -x+2)=(x,y)$

$\Rightarrow \quad x=y+3, \quad y=-x+2$

두 식을 연립하면, $x=\frac{5}{2}, \quad y=-\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

41. 원 $x^2+(y-3)^2=1$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 시켜 얻어진 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동 시켰더니 x 축에 접하였다. 이 때, p 의 값은?

① 0　　② ±1　　③ ±2　　④ ±3　　⑤ ±4

해설

원 $x^2+(y-3)^2=1$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여
대칭이동 시키면 $y^2+(x-3)^2=1$ 이 된다.
이 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동
시킨다고 했으므로 구하는 도형의 방정식은
$(y-p)^2+(x-3)^2=1$ 이다.
이 도형이 x 축에 접한다고 했으므로
p 는 ±1

42. 직선 $3x-2y+6=0$ 에 관하여 점 P(5, 4) 와 대칭인 점 Q 의 좌표를 구하면?

① Q(−1, 2) ② Q(−1, 3) ③ Q(−1, 4)

④ Q(−1, 6) ⑤ Q(−1, 8)

해설

Q(a, b) 라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점

$\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$ 은 직선 $3x-2y+6=0$ 위에 있으므로

$3\times\frac{a+5}{2}-2\times\frac{b+4}{2}+6=0$

$\to 3a+15-2b-8+12=0$

$\to 3a-2b=-19 \cdots$ ①

또, 주어진 직선과 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 는 서로 직교하므로

기울기의 곱$=-1$ 이 된다.

$\therefore \frac{b-4}{a-5}\times\frac{3}{2}=-1 \to 3b-12=-2a+10$

$\to 2a+3b=22 \cdots$ ②

① 과 ② 를 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=8$

$\therefore$ Q(−1, 8)

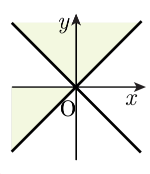
43. 다음 중 원 $x^2+y^2+8x+8y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

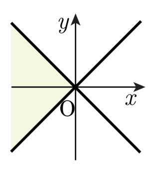
① $x^2+y^2=\frac{1}{5}$ ② $x^2+y^2=3$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=16$ ④ $(x+1)^2+y^2=4$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{3}$

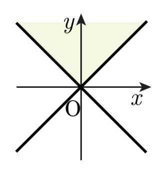
해설

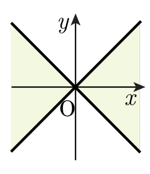
평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+8x+8y+16=0$ 에서 $(x+4)^2+(y+4)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4 인 ③이다.

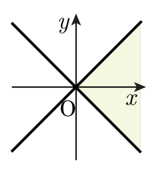
44. x 와 y 는 $(x+y)(x-y) \neq 0$ 인 실수이고 $\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = -\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$ 가 성립할 때, 점 $(x,\ y)$ 가 존재하는 영역을 좌표평면 위에 검게 나타내면? (단, 점선은 제외)

①


②


③


④


⑤


해설

$(x+y)(x-y) \neq 0$ 일 때

$\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = -\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$ 가 성립하는 경우는

$x-y<0,\ x+y>0$ 일 때 뿐이다.

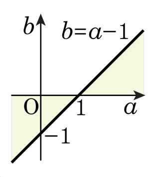
$\therefore\ y>x,\ y>-x$

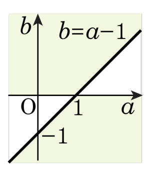
45. 점 $(a, \ -3)$ 이 포물선 $y = x^2 + 4x$ 의 윗부분에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

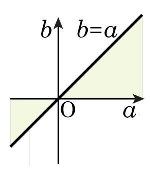
① $-3 < a < -1$ ② $-3 \le a < 1$ ③ $1 < a < 3$
④ $1 \le a < 3$ ⑤ $-3 < a < 1$

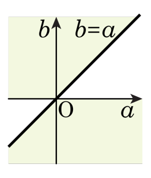
해설
점 $(a, \ -3)$ 이 포물선 $y = x^2 + 4x$ 의 윗부분에 있으므로
$-3 > a^2 + 4a$, $(a+3)(a+1) < 0$
$\therefore -3 < a < -1$

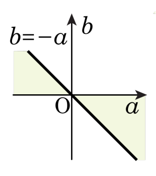
46. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$의 그래프가 두 점 $(0,0)$, $(1,1)$ 사이를 지난다. 이 때, 점 (a,b)의존재 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 제외)

①


②


③


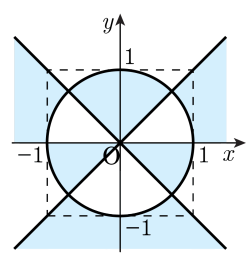
④


⑤


해설

$f(x,y) = x^2 - ax + b - y$로 놓으면
$f(x,y) = 0$이 두 점 $(0,0)$, $(1,1)$ 사이를 지나므로
$f(0,0)f(1,1) < 0$, $b(-a+b) < 0$
즉, $b > 0$, $-a+b < 0$ 또는 $b < 0$, $-a+b > 0$이므로
$b > 0$, $b < a$ 또는 $b < 0$, $b > a$
따라서, 이 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

47. 다음 그림의 어두운 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선 포함)



① $(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

② $x(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \leq 0$

③ $x(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

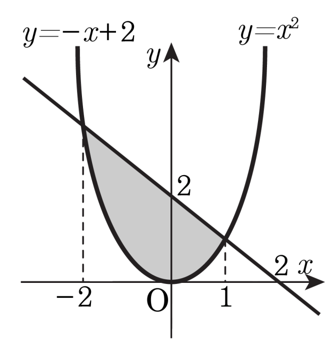
④ $y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

⑤ $y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \leq 0$

해설

주어진 그림에서 경계선은 직선
$y=x,\ y=-x$ 와
원 $x^2+y^2=1$ 및 x 축$(y=0)$이다.
따라서, $f(x,\ y)=y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1)$ 로 놓고
주어진 영역에 속하는점 $(2,\ 1)$ 을 대입하면
$f(2,\ 1)=1\cdot1\cdot3\cdot2-12>0$ 이다.
이때, 경계선을 포함하므로 구하는 부등식은
$y(x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

48. 다음 그림에서 어두운 부분을 영역으로 하는 연립부등식을 구하면? (단, 경계선 포함)



① $(y-x^2)(x+y-2) \le 0$

② $(y-x^2)(x+y-2) \ge 0$

③ $\begin{cases} y-x^2 \ge 0 \\ x+y-2 \le 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} y-x^2 \le 0 \\ x+y-2 \ge 0 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} y-x^2 > 0 \\ x+y-2 < 0 \end{cases}$

해설

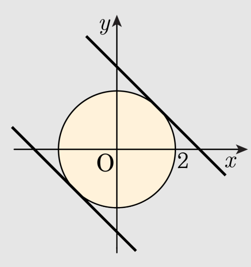
$y = x^2$ 의 위쪽과 $y = -x + 2$ 의 아랫부분이므로

$\begin{cases} y-x^2 \ge 0 \\ x+y-2 \le 0 \end{cases}$

49. 부등식 $x^2 + y^2 \le 4$를 만족하는 x, y에 대하여 $x + y$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하면?

① -6　　② -7　　③ -8　　④ -9　　⑤ -10

해설



다음 그림에서 주어진 부등식은 중심 $(0,\ 0)$이고 반지름이 2인 원의 내부와 둘레이다.
이때, $x+y=k$라 두면 $y=-x+k\cdots$①
이것은 기울기 -1, y절편 k인 직선이다.
따라서 k의 값은 직선 ①과 주어진 원이 접할 때 최솟값과 최댓값을 갖는다.
기울기가 -1인 원의 접선의 방정식은
$y=-x\pm 2\sqrt{1+(-1)^2}$, $\therefore\ y=-x\pm 2\sqrt{2}$
따라서 k의 최댓값 $2\sqrt{2}$, 최솟값 $-2\sqrt{2}$이므로
최댓값과 최솟값의 곱은 $2\sqrt{2}\cdot(-2\sqrt{2})=-8$

50. $|x| + |y| \leq 1$ 을 만족하는 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$|x|+|y| \leq 1$ 을 만족하는 부등식의 영역은 다음 그림에서 마름모의 둘레와 내부이다.
x^2+y^2 은 원점과 점 $(x,\ y)$ 사이의 거리의 제곱이므로 최솟값은 0 이고 최댓값은 1 이 된다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 1 이다.