1. 실수 a, b에 대하여 $a > b$일 때, 다음 <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $|a| > |b|$ ㉡ $a^3 > b^3$

㉢ $a^2 > b^2$ ㉣ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡ , ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a > 0 > b$인 경우에서는 b의 절댓값이 더 클 수도 있다.
㉢ ㉠과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다.
㉣ 역시 $a > 0 > b$인 경우 역수를 취하여도 부등호 방향은 변하지 않는다.

2. 다음 중 $y < \frac{1}{2}x + 1$의 영역 안에 있는 점은?

① $(2, 1)$ ② $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ ③ $(5, 4)$
④ $(0, 2)$ ⑤ $(-7, -2)$

해설

직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 보다 아래에 있는 점은 $(2,\ 1)$

3. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ -3 ⑤ -5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

4. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

5. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

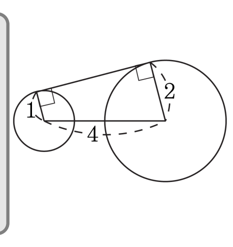
$\therefore a=3$

6. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{15}$　③ 0　④ $2\sqrt{5}$　⑤ 5

해설

두 원의 중심간 거리는 4이다.
피타고라스의 정리에 의해 공통외접선의 길이를 구하면
$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ 이다.



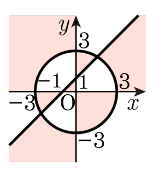
7. 점 $(3, 4)$를 y축, x축, 원점에 대하여 대칭이동하는 것을 순서에 관계 없이 임의로 반복할 때, 좌표평면 위에 나타나지 않는 점은?

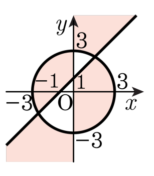
① $(3, -4)$ ② $(-3, 4)$ ③ $(-3, -4)$
④ $(4, 3)$ ⑤ $(3, 4)$

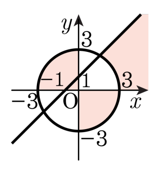
해설

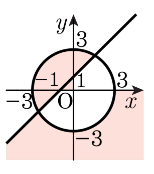
x축대칭은 y의 부호를 반대로, y축대칭은 x의 부호를 반대로, 원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.

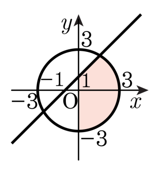
8. 부등식의 영역 $xy(x-y+1)(x^2+y^2-9)>0$ 을 만족하는 $(x,\ y)$ 의 영역을 그림으로 옳게 나타낸 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

경계선 위에 있지 않은 임의의 점을 부등식 $xy(x-y+1)(x^2+y^2-9)>0$ 에 대입해보면 구하는 영역은 ① 번과 같다.

9. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

10. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 ω, $\overline{\omega}$라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega + \overline{\omega} = -1$ ② $\omega \cdot \overline{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\overline{\omega})^2 = 1$ ④ $\omega^2 = \overline{\omega}$, $(\overline{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$, $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$,
$x^2 + x + 1 = 0$ $\omega^3 = 1$,
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$,
$\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0$
① $x^2 + x + 1 = 0$두근은
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega + \overline{\omega} = -1$(○)
② $x^2 + x + 1 = 0$두근은
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega \cdot \overline{\omega} = 1$(○)
③ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega \cdot \overline{\omega}$
$= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1$(×)
④ $\omega + \overline{\omega} = -1$,
$\overline{\omega} = -1 - \omega$
$= -(1 + \omega) = \omega^2$
$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega = -1 - \overline{\omega} = -(1 + \overline{\omega})$
$= \overline{\omega}^2$(○)
⑤$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

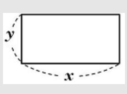
11. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots㉠$
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots㉡$
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17,\ 2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x - 3$ 을 이차식에 대입하면

$x^2 + 2x(x - 3) + (x - 3)^2 = 1$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\therefore\ x = 1, 2$

(i) $x = 1$ 일 때 $y = -2$

(ii) $x = 2$ 일 때 $y = -1$

따라서 $xy = -2$

13. a, b는 실수라 한다. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2+a^2x+b^2-2a=0$, $x^2-2ax+a^2+b^2=0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a+b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

공통근을 α라 하면
$\alpha^2+a^2\alpha+b^2-2a=0 \quad \cdots$ ①
$\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2=0 \quad \cdots$ ②
① − ② 하면 $(a^2+2a)\alpha-(a^2+2a)=0$
$\therefore\ (a^2+2a)(\alpha-1)=0$
$\therefore\ a^2+2a=0$ 또는 $\alpha=1$
그런데 $a^2+2a=0$일 때는 $a^2=-2a$이므로
두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.
$\therefore\ \alpha=1$
①에 대입하면 $1+a^2+b^2-2a=0$
$\therefore\ (a-1)^2+b^2=0$
a, b는 실수이므로 $a-1=0$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

14. 0이 아닌 실수 $x,\ y$가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : −1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서
$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$
$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$
$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$
$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로
$xy-2a=0,\ y-2ax=0$
$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$
$(a\neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm 1$

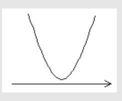
15. 모든 실수 x에 대하여 부등식$(k-2)x^2+2(k-2)x+1>0$이 성립할 때, 실수 k값의 범위가 $m \le k < n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m+n=5$

해설

① $k=2$일 때 $1>0$ $\therefore$ 성립한다.

②  아래로 볼록 $(k-2)>0$, $k>2$

③ $\frac{D}{4}<0$에서 $(k-2)^2-(k-2)<0$

$(k-2)(k-3)<0$, $2<k<3$

①을 만족하거나 ②와 ③)을 동시에 만족해야 하므로 $2 \le k < 3$

$\therefore m=2, n=3$, $m+n=5$

16. 두 함수 $f(x) = mx^2 - 4x + 4$, $g(x) = -2x^2 + 2mx$ 가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) < y < f(x)$ 를 만족시키는 실수 y 가 존재할 때, 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-3 < m < 0$　② $-2 < m \leq 3$　③ $0 \leq m < 2$
④ $-2 \leq m < 2$　⑤ $-2 < m \leq 4$

해설

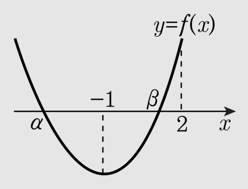
모든 실수 x 에 대하여 $f(x) - g(x) > 0$ 을 만족시키는 조건을 구한다.
$f(x) - g(x) = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 > 0$
(i) $m + 2 = 0$ 이면 $f(x) - g(x) = 4 > 0$
따라서 $m = -2$ 일 때, 성립한다.
(ii) $m + 2 > 0$, $\frac{D}{4} < 0$ 에서
$-2 < m < 2$
(i), (ii) 에서 $-2 \leq m < 2$

17. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2 < a < 0$ ② $-2 < a < 1$ ③ $0 < a < 2$
④ $1 < a < 2$ ⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1-2a+a^2-1 < 0$ 에서 $a^2-2a < 0$, $a(a-2) < 0$
$\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0$, $(a+3)(a+1) > 0$
$\therefore a < -3$, $a > -1$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 2$

18. 중심이 직선 $3x+y=12$의 제1사분면 위에 있고, x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-1)^2=1$　② $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

③ $(x-3)^2+(y-3)^2=9$　④ $(x-4)^2+(y-4)^2=16$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

해설

x축 및 y축에 동시에 접하므로 구하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$으로 나타낼 수 있다.
중심이 $a, -3a+12$를 지나므로 $a=-3a+12$이다.
따라서 $a=3$,
구하는 원의 방정식은 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$이다.

19. 두 정점 A(0, 0), B(0, 6) 에서의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 2 : 1 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times 6}{2+1}\right) = (0,\ 4)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times 6}{2-1}\right) = (0,\ 12)$

$\therefore$ 중심은 (0, 8) 이고, 반지름이 4 인 원

$\Rightarrow$ 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$

20. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

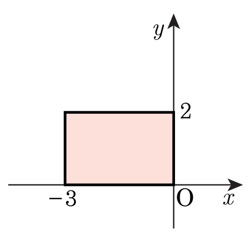
▷ 정답 : $c = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을
표준형으로 바꾸면 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
$\therefore\ c = 5$

21. 다음 색칠된 부분을 만족시키는 x, y 에 대하여 $y-2x$ 의 최댓값을 구하면?

① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 0



해설

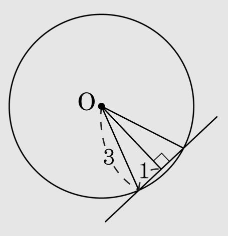
$y=2x+k$ 라 하면,
$y=2x+k$ 이 직선을 영역 안에서 움직여보면
점 $(-3,\ 2)$ 를 지날 때 최대이므로
최댓값을 구하면
$k=y-2x=8$

22. 직선 $y = x + m$ 이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 2 일 때, m^2 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



위 그림을 보면 원과 직선사이 거리가

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

이제 공식을 사용하면,

$$\frac{|m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \quad m = \pm 4$

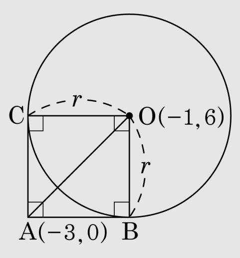
$\therefore \quad m^2 = 16$

23. 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값은? (단, $r>0$)

① 4　　② $3\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ $2\sqrt{6}$　　⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이
O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이
□ABOC는 한 변의 길이가 r인 정사각형이 된다.



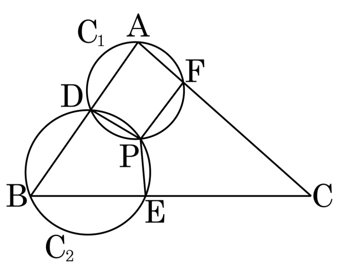
이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가
$r\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$

$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$

$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

24. 다음은 삼각형 ABC 의 각 꼭짓점을 지나는 원에 대한 어떤 성질을 설명한 것이다.



그림처럼 세 점 A, D, F 를 지나는 원 C_1 과 세 점 B, D, E 를 지나는 원 C_2 의 교점 P 가 삼각형 ABC 의 내부에 존재하도록 세 변 AB, BC, CA 위에 각각 점 D, E, F 를 잡는다.

$\angle DPF + \boxed{\text{가}} = 180°$

$\angle DPE + \boxed{\text{나}} = 180°$

$\angle DPF + \angle DPE = 360 - \left(\boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}\right)$ 에서

$\angle FPE = \boxed{\text{가}} + \boxed{\text{나}}$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C_3 라 할때, $\boxed{\text{다}}$

(가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

② (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_1, C_2, C_3 은 한 점 P 에서 만난다.

③ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

④ (가)$\angle B$, (나)$\angle A$, (다)C_3 의 내부에 점 P 가 존재한다.

⑤ (가)$\angle A$, (나)$\angle B$, (다)C_3 의 외부에 점 P 가 존재한다.

해설

□ADPF 에서 $\angle DPF + \angle A = 180°$

□BEPD 에서 $\angle DPE + \angle B = 180°$

따라서 $\angle DPF + \angle DPE = 360° - (\angle A + \angle B)$

$\angle FPE = \angle A + \angle B$

$\therefore\ \angle FPE + \angle C = 180°$

따라서 세 점 C, F, E 를 지나는 원을 C3 라 할 때,

세 원 C1, C2, C3는 한 점 P 에서 만난다.

25. 다음 표는 어느 공장에서 두 제품 A, B 를 각각 한 개씩 생산하는데 필요한 원료 $P,\ Q$ 의 소모량과 하루의 최대 공급량을 나타낸 것이다. 두 제품 A, B 를 생산하여 얻게 되는 이익은 한 개에 각각2 만원, 3 만원이라 할 때, 이 공장에서 제품을 생산하여 얻을 수 있는 하루의 최대 이익을 구하면?

	P	Q
A	1	2
B	3	1
최대공급량	90	80

① 60만원　② 90만원　③ 100만원

④ 120만원　⑤ 150만원

해설

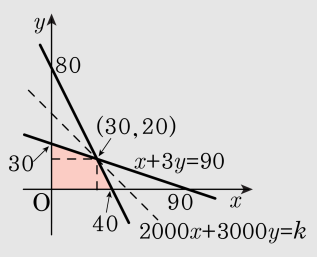
제품 $A,\ B$ 를 각각 $x,\ y$ 개 만든다고 하면,

$x \geq 0,\ y \geq 0 \cdots$ ㉠

원료 P : $x + 3y \leq 90 \cdots$ ㉡

원료 Q : $2x + y \leq 80 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분이다.



이익을 k 원이라 하면 $20000x + 30000y = k$

이 직선이 ㉡과 ㉢의 교점인 $(30,\ 20)$ 을 지날 때,

k 의 값이 최대이므로 최대 이익은

$\therefore\ 20000 \times 30 + 30000 \times 20 = 120$(만원)