

1. 함수 $f : R \rightarrow R$ 에서 $f(x) = x^2 + x + 1$ 이다. $f(a) = 3$ 일 때, a 의 값은? (단, $a > 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$a^2 + a + 1 = 3$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a + 2)(a - 1) = 0$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\therefore a > 0 \text{ 이므로 } a = 1$$

2. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 점 $(-3, 27)$ 을 지날 때, a 의 값은?

① -2

② 2

③ 3

④ -3

⑤ 9

해설

$y = ax^2$ 의 그래프가 점 $(-3, 27)$ 을 지나므로
 $27 = a(-3)^2, a = 3$

3. 다음 이차함수의 그래프 중에서 x 축에 대하여 서로 대칭인 것끼리 짝지은 것을 모두 고르면?

㉠ $y = -2x^2$	㉡ $y = -\frac{1}{3}x^2$	㉢ $y = -\frac{1}{6}x^2$
㉤ $y = -3x^2$	㉥ $y = \frac{1}{6}x^2$	㉦ $y = 2x^2$

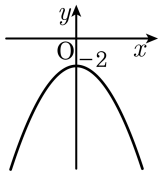
- ① ㉠, ㉢ ② ㉡, ㉤ ③ ㉢, ㉥ ④ ㉡, ㉥ ⑤ ㉤, ㉦

해설

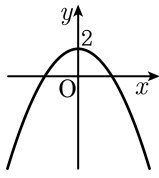
x 축에 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이다.
따라서 ㉠, ㉢ 또는 ㉢, ㉥이다.

4. 다음 중 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$ 의 그래프는?

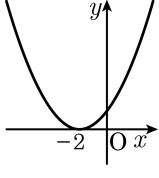
①



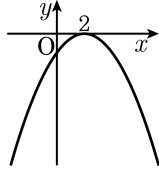
②



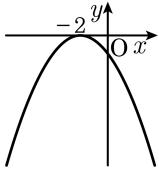
③



④



⑤



해설

꼭짓점의 좌표가 (0, 2) 이고, 위로 볼록한 모양의 포물선이다.

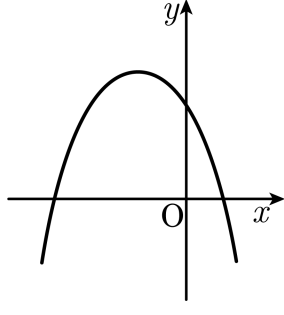
5. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -6만큼 평행이동하면 점 $(6, k)$ 을 지난다고 할 때, k 의 값은?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -3 ⑤ 5

해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 y 축으로 q 만큼, x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y = a(x - p)^2 + q$ 이므로 함수의 식은 $y = 3(x - 5)^2 - 6$ 이다. 점 $(6, k)$ 를 지나므로 대입하면 $k = 3(6 - 5)^2 - 6$ 이므로 $k = -3$ 이다.

6. 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ 의 그래프가 다음과 같을 때, a, p, q 의 부호는?

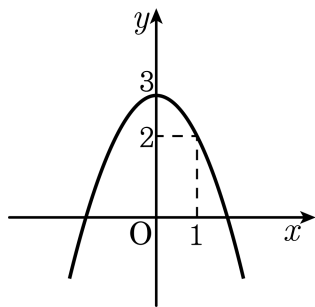


- ① $a > 0, p > 0, q > 0$
- ② $a < 0, p < 0, q < 0$
- ③ $a > 0, p < 0, q < 0$
- ④ $a < 0, p < 0, q > 0$
- ⑤ $a < 0, p > 0, q > 0$

해설

위로 볼록한 모양의 포물선이고, 꼭짓점의 좌표는 제 2 사분면 위에 있으므로
 $a < 0, p < 0, q > 0$ 이다.

7. 다음 그림과 같은 그래프를 가지는 이차함수의 식은?

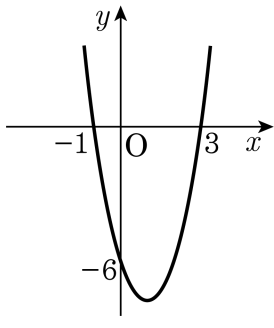


- ① $y = 3x^2 + 1$ ② $y = 3x^2 + 2$ ③ $y = -3x^2 + 3$
④ $y = -x^2 + 3$ ⑤ $y = -x^2 + 2$

해설

그래프의 이차함수의 꼭짓점은 $(0, 3)$ 이므로 $y = ax^2 + 3$ 이고
 $(1, 2)$ 를 지나므로 $2 = a + 3$, $a = -1$ 이다.
따라서 그래프의 식은 $y = -x^2 + 3$ 이다.

8. 다음 그림과 같은 포물선의 식은?



① $y = x^2 + 2x - 6$

② $y = 2x^2 + 4x - 6$

③ $y = x^2 - 2x - 6$

④ $y = 2x^2 - 4x - 6$

⑤ $y = x^2 + 4x - 6$

해설

그림에서 x 절편이 $-1, 3$ 이므로

구하는 식은 $y = a(x + 1)(x - 3)$

$(0, -6)$ 을 지나므로 $-6 = -3a$

$$\therefore a = 2$$

$$y = 2(x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$$

$$\therefore y = 2x^2 - 4x - 6$$

9. 다음 중 y 가 x 에 관한 이차함수인 것을 모두 고르면?

- ① 지름의 길이가 x 인 원의 넓이 y
- ② 한 변의 길이가 x 인 정사각형의 넓이 y
- ③ 윗변의 길이가 $2x$, 아랫변의 길이가 $3x$, 높이가 3 인 사다리꼴의 넓이 y
- ④ 밑변의 반지름의 길이가 x , 높이가 10 인 원뿔의 부피 y
- ⑤ 시속 x km 로 3 시간 동안 달린 거리 y

해설

① $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \pi$ 이므로 이차함수이다.

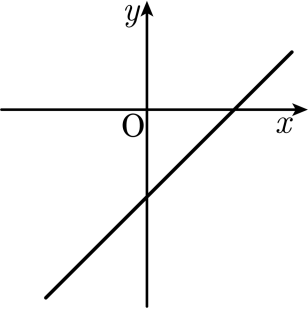
② $y = x^2$ 이므로 이차함수이다.

③ $y = \frac{3}{2}(2x + 3x)$ 이므로 이차함수가 아니다.

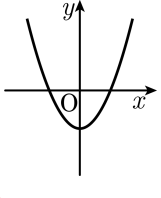
④ $y = \frac{10}{3}x^2\pi$ 이므로 이차함수이다.

⑤ $y = 3x$ 이므로 이차함수가 아니다.

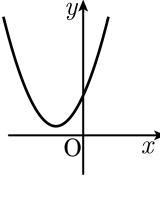
10. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = bx^2 + a$ 의 그래프는?



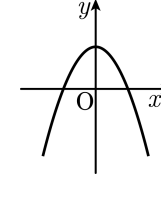
①



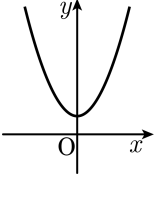
②



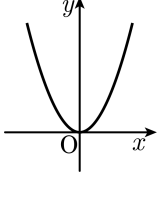
③



④



⑤



해설

$y = ax + b$ 그래프에서 $a > 0$, $b < 0$ 이므로 이차함수 $y = bx^2 + a$ 는 위로 볼록하고 y 절편이 양수이다.

11. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2$ 의 그래프에서 x 값이 증가함에 따라 y 값도 증가하는 x 의 값의 범위는?

① $x > 0$

② $x < 2$

③ $x > 2$

④ $x > -2$

⑤ $x < -2$

해설

꼭짓점이 $(-2, 0)$ 이고 위로 볼록한 그래프이다. $x < -2$ 일 때, x 가 증가하면 y 도 증가한다.

12. $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 후 다시 x 축에 대하여 대칭이동 한 그래프의 식을 구하면?

① $y = -2(x + 3)^2$

② $y = -2(x - 3)^2$

③ $y = 2(x - 3)^2$

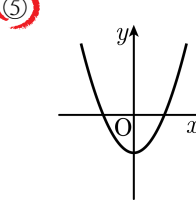
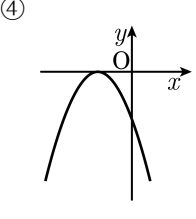
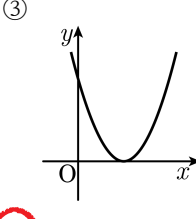
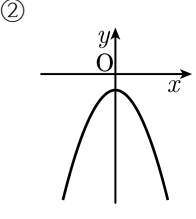
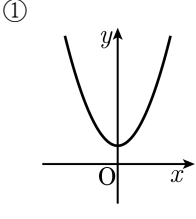
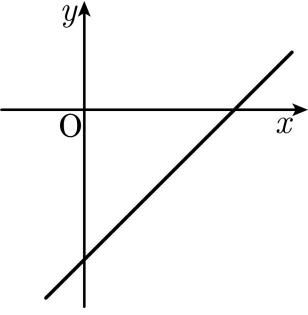
④ $y = 2(x + 3)^2$

⑤ $y = -2(3x - 1)^2$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하면 $y = 2(x - 3)^2$ 이고, 이를 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = 2(x - 3)^2$ 이다.
따라서 $y = -2(x - 3)^2$ 이다.

13. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 개형은?



해설

$y = ax + b$ 의 그래프에서
 $a > 0, b < 0$ 이다.

14. 이차함수 $y = 2x^2 - 4x + 3$ 과 $y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표가 일치할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 4x + 3 \\&= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 \\&= 2(x - 1)^2 - 2 + 3 \\&= 2(x - 1)^2 + 1\end{aligned}$$

꼭짓점의 좌표: (1, 1)

꼭짓점의 좌표가 일치하므로

$$\begin{aligned}y &= x^2 + ax + b = (x - 1)^2 + 1 \\&= x^2 - 2x + 2\end{aligned}$$

$$\therefore a = -2, b = 2, a + b = 0$$

15. 다음 보기의 이차함수의 그래프 중 $y = -2x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 완전히 포괄 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = -2x^2 + 2$

㉡ $y = 2x^2 - 3$

㉢ $y = -2(x + 1)^2$

㉤ $y = x^2 + 3x + 3 - 3(x - 1)(x + 1)$

㉥ $y = \frac{6x^2 - 2}{3}$

① ㉠,㉡,㉢

② ㉠,㉡,㉢

③ ㉠,㉢,㉤

④ ㉠,㉢,㉥

⑤ ㉠,㉤,㉥

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 a 의 값이 같으면 평행 이동하여 두 이차 함수의 그래프를 완전히 포괄 수 있다.

따라서 $a = -2$ 인 것은 ㉠,㉢,㉤이다.

16. 이차함수 $y = 4x^2 + kx + 2$ 의 그래프의 꼭짓점이 $y = x - 1$ 의 그래프 위에 있고 $x > a$ 이면 y 의 값이 증가하고, $x < a$ 이면 y 의 값은 감소한다. 이 때 꼭짓점의 좌표를 구하여라. (단, $a < 0$)

① $(-1, -1)$

② $(-1, -2)$

③ $(1, 1)$

④ $(1, 2)$

⑤ $(1, 3)$

해설

축의 방정식이 $x = a$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표가 a 이다.
따라서 $(a, a - 1)$ 을 지나므로 $y = 4(x - a)^2 + a - 1 = 4x^2 - 8ax + 4a^2 + a - 1$ 이고 $4a^2 + a - 1 = 2$ 이다.
따라서 $(4a - 3)(a + 1) = 0$ 이므로 $a = -1(a < 0)$ 이므로 꼭짓점은 $(-1, -2)$ 이다.

17. 이차함수의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나는 것을 모두 고르면?

① $y = 4x^2 - 4x + 1$

② $y = x^2 - 3x + 2$

③ $y = 2x^2 + 3x + 4$

④ $y = -2x^2 + 4x - 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$

해설

② $D = 3^2 - 4 \times 2 > 0$

⑤ $D = (-1)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

18. 이차함수 $y = -x^2 + 6x - 8$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 직선 $x = -3$ 을 축으로 한다.
- ② 모든 x 의 값에 대하여 y 의 값의 범위는 $y \geq 1$ 이다.
- ③ 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 1)$ 이다.
- ④ $x > 3$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
- ⑤ $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

해설

$$y = -(x - 3)^2 + 1$$

- ① 축의 방정식 $x = 3$
- ② $y \leq 1$
- ③ 꼭짓점 $(3, 1)$
- ⑤ x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동

19. 축이 $x = 2$ 이고, 두 점 $(0, 3)$, $(1, 6)$ 를 지나는 이차함수의 식은?

① $y = x^2 - 4x - 2$

② $y = x^2 + 4x + 2$

③ $y = -x^2 + 4x - 3$

④ $y = -x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -x^2 - 4x - 3$

해설

축이 $x = 2$ 이므로 $y = a(x - 2)^2 + q$

두 점 $(0, 3)$, $(1, 6)$ 을 지나므로

$$3 = 4a + q, 6 = a + q$$

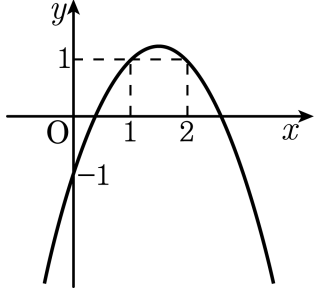
$$\therefore a = -1, q = 7$$

$$y = -(x - 2)^2 + 7$$

$$y = -(x^2 - 4x + 4) + 7$$

$$y = -x^2 + 4x + 3$$

20. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a + 3b + c$ 의 값은?



- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

세 점 $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ 을 지나는 그래프이다.
점 $(0, -1)$ 을 지나므로 $-1 = c$
점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $1 = a + b + c$
점 $(2, 1)$ 을 지나므로 $1 = 4a + 2b + c$
세 식을 연립하면 $a = -1$, $b = 3$, $c = -1$ 이므로
 $a + 3b + c = -1 + 9 + (-1) = 7$ 이다.

21. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -2$ 일 때, 최댓값 3 을 갖는다. 이 때 $a + b + c$ 의 값은?

- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

모양이 같으므로 $a = -\frac{1}{2}$

꼭짓점에서 최댓값을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 3)$,

따라서 $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 1$

$\therefore a + b + c = -\frac{3}{2}$

22. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

- ① 16
- ② 20
- ③ 36
- ④ 55
- ⑤ 64

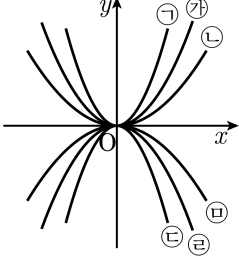
해설

부채꼴의 반지름을 a , 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16 - 2a) = a(8 - a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a - 4)^2 + 16 \end{aligned}$$

이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

23. 다음 그림은 모두 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이며, x 축을 기준으로 위, 아래에 놓여있는 그래프는 서로 대칭이다. 그 중 ㉓는 $y = x^2$ 의 그래프이다. $-1 < a < 0$ 일 때, $y = ax^2$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것을 찾아 기호로 써라.



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉔

해설

$-1 < a < 0$ 이므로 위로 볼록, $|a| < 1$ 이므로 폭은 ㉓ $y = x^2$ 보다 넓은 포물선이다.
따라서 ㉔이다.

24. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 (2, 0) 이 되도록 평행 이동하면 점 $(k, 6)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : -1

해설

이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 (2, 0) 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 $(k, 6)$ 을 지나므로 대입하면 $6 = \frac{2}{3}(k-2)^2$, $9 = (k-2)^2$, $k-2 = \pm 3$ 따라서 $k = 5, -1$ 이다.

25. 이차함수 $y = x^2 + ax - b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{b}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{4}$

해설

$$y = x^2 + ax - b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - b,$$

꼭짓점 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} - b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} - b = 0$,

$$b = -\frac{a^2}{4},$$

$$\therefore \frac{b}{a^2} = b \times \frac{1}{a^2} = -\frac{a^2}{4} \times \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

26. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는 $x = 1$ 인 직선에 대해 대칭이고 x 절편은 3 이다. $a + b = -2$ 를 만족할 때, $2a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \text{ 의 그래프가 } x = 1$$

인 직선에 대해 대칭이면

꼭짓점의 x 좌표가 1 이므로 $-\frac{b}{2a} = 1$,

$$b = -2a \cdots \textcircled{A}$$

$$a + b = -2 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에 의하여 $a = 2$, $b = -4$

또한 x 절편이 3 이므로 $9a + 3b + c = 0$

$$\therefore c = -6$$

따라서 $2a + b + c = 4 - 4 - 6 = -6$ 이다.

27. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 점 $(3, -4)$, $(0, 11)$ 을 지났다. $p + q$ 의 값을 구하여라.

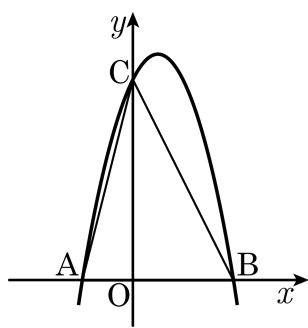
▶ 답 :

▷ 정답 : $p + q = -1$

해설

평행이동한 그래프의 식을 $y = x^2 + bx + c$ 라고 하자.
 $y = x^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(3, -4)$, $(0, 11)$ 을 지나므로
 $-4 = 9 + 3b + c$, $11 = c$
 $3b = -24 \quad \therefore b = -8$
 $y = x^2 - 8x + 11 = (x - 4)^2 - 5$
 $y = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$
꼭짓점의 좌표가 $(2, -2)$ 에서 $(4, -5)$ 로 이동하였으므로 $p = 2$, $q = -3$ 이다.
 $\therefore p + q = 2 - 3 = -1$

28. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 8$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하면?

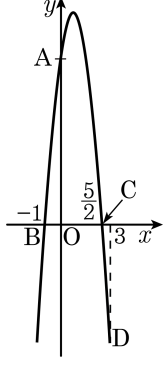


- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$y = -x^2 + 2x + 8$ 의 C 의 좌표 $(0, 8)$
 $-x^2 + 2x + 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
 $x = 4$ 또는 $x = -2$
A $(-2, 0)$, B $(4, 0)$ 이므로
 $\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$

29. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 $\frac{35}{2}$ 일 때, $\triangle BCD$ 의 넓이를 구하여라. (단, A, B, C, D는 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 위의 점이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} & A(0, c), \quad B(-1, 0), \quad C\left(\frac{5}{2}, 0\right), \quad D(3, p), \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \\ & \left(1 + \frac{5}{2}\right) \times c = \frac{35}{2}, \quad c = 10 \\ & A(0, 10) \\ & y = ax^2 + bx + c = a(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right), \\ & -\frac{5}{2}a = 10, \quad a = -4 \\ & y = -4(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right) = -4x^2 + 6x + 10, \\ & y = -4x^2 + 6x + 10 \text{ 에 } D(3, p) \text{ 를 대입하면} \\ & p = -36 + 18 + 10 = -8, \quad D(3, -8) \\ & \therefore \triangle BCD = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{5}{2}\right) \times 8 = 14 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

30. $x + y = 10$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 10

② 24

③ 40

④ 45

⑤ 50

해설

$$y = 10 - x$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2$$

$$= x^2 + x^2 - 20x + 100$$

$$= 2x^2 - 20x + 100$$

$$= 2(x^2 - 10x + 25 - 25) + 100$$

$$= 2(x - 5)^2 + 50$$

따라서 $x = 5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

31. 둘레의 길이가 32 cm인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 8 cm

해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm² 라 하면,
 $y = x(16 - x)$
 $= -x^2 + 16x$
 $= -(x^2 - 16x)$
 $= -(x - 8)^2 + 64$
따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

32. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

- ① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다.

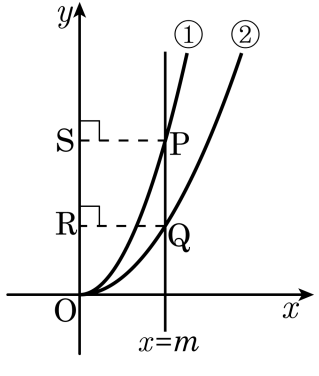
해설

$$y = 50t - 5t^2$$

$$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t - 5)^2 + 125$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.

33. 다음 그림은 이차함수 $y = \frac{3}{4}x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{1}$, $y = \frac{1}{3}x^2 (x \geq 0) \cdots \textcircled{2}$ 의 그래프이다. y 축에 평행한 직선 $x = m (m > 0)$ 이 $\textcircled{1}$ 과 만나는 점을 P, $\textcircled{2}$ 와 만나는 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 y 축에 내린 수선이 y 축과 만나는 점을 각각 S, R이라 할 때, $\square PQRS$ 가 정사각형이 되는 m 의 값을 구하면?



- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{13}{5}$

해설

$\square PQRS$ 가 정사각형이 되려면

$$\frac{3}{4}m^2 - \frac{1}{3}m^2 = m \text{ 이어야 한다.}$$

이것을 풀면 $\frac{5}{12}m^2 = m$

따라서 $m > 0$ 이므로 $m = \frac{12}{5}$ 이다.

34. x 축 위의 두 점 $A(5, 0)$, $B(-3, 0)$ 과 이차함수 $y = a(x+1)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -12$ 와의 두 교점 C , D 를 연결한 사각형은 평행사변형일 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 8$$

점 C 와 D 는 직선 $x = -1$ 을 중심으로 좌우대칭이므로 $B(-5, -12)$, $C(3, -12)$

점 C 와 점 D 는 $y = a(x+1)^2$ 위의 점이므로

$$-12 = 16a$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

35. 이차함수 $y = x^2 - 5x - 6$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만난다고 한다. 이 때, 선분 AB 의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x^2 - 5x - 6$ 의 x 절편은 $y = 0$ 대입

$x^2 - 5x - 6 = 0, (x + 1)(x - 6) = 0$

$\therefore x = -1, 6$

$\therefore AB = 6 - (-1) = 7$

36. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $(x-1) : (y-3) : (z+2) = 2 : 1 : 3$ 일 때, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$(x-1) : (y-3) : (z+2) = 2 : 1 : 3$ 이므로

$x-1 = 2k$ 에서 $x = 2k + 1$

$y-3 = k$ 에서 $y = k + 3$

$z+2 = 3k$ 에서 $z = 3k - 2$

$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ 에 대입하면

$(k-2)^2 + (-2k+5)^2 + (k-3)^2$

$= 6k^2 - 30k + 38$

$= 6 \left(k - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$

따라서 $k = \frac{5}{2}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

37. 함수 $y = x^2 - q$, $y = -x^2 + q$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 21 일 때, q 의 값을 구하여라. (단, $q > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = 0$ 이므로 직사각형은 직선 $x = 0$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $-t, t$ 라 하면 가로 길이는 $2t$,

세로의 길이는 $(-t^2 + q) - (t^2 - q) = -2t^2 + 2q$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(-2t^2 + 2q + 2t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4q + 1 \text{ 이다.}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $4q + 1 = 21$ 이므로 $q = 5$ 이다.

38. 이차함수 $y = -x^2 + 2mx + m$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{8}$

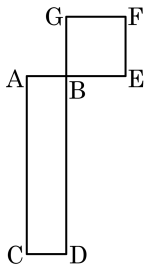
해설

$y = -x^2 + 2mx + m = -(x - m)^2 + (m^2 + m)$ 에서
위로 볼록이므로 최댓값은 $m^2 + m$

$$M = m^2 + m = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$\therefore M$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$

39. 다음 그림과 같이 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E를 잡고 선분 BE를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG를 그릴 때, 선분 GD의 길이는 12이다. 이때 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{576}{13}$

해설

$\overline{AB} = x$ 라 하면

$\overline{AB} : \overline{BE} = 2 : 3$ 이므로

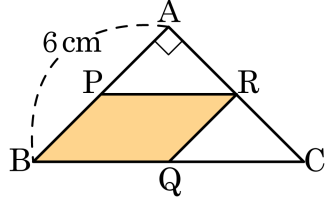
$$\overline{BE} = \frac{3}{2}x = \overline{BG}$$

$$\overline{BD} = 12 - \overline{BG} = 12 - \frac{3}{2}x = \overline{AC}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= x^2 + \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 \\ &= \frac{13}{4} \left(x - \frac{72}{13}\right)^2 + \frac{576}{13} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ 의 최솟값은 $\frac{576}{13}$ 이다.

40. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC의 $\overline{AB}$ 위에 점 P를 잡고, 점 P에서 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그려 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R라 한다. □PBQR의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\square PBQR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle RQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \left\{ \frac{1}{2} \times (6-x)^2 + \frac{1}{2} x^2 \right\}$$

$$= 18 - (x^2 - 6x + 18)$$

$$= -x^2 + 6x$$

$$= -(x-3)^2 + 9$$

따라서 $\overline{BP} = 3\text{cm}$ 일 때, □PBQR의 넓이가 최대가 된다.