1. 다음 중에서 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $a^2 \geq 0$ ② $a^2 + b^2 \geq 0$

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

해설

① $a^2 \geq 0$ (항상 성립)
② $a^2 + b^2 \geq 0$ (항상 성립)
③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (항상 성립)
④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (항상 성립)
⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$
(반례 : $a > 0$, $b < 0$이면 $a > b$이지만 $ab < 0$이다.)

2. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \rightarrow (x-1)^2 \le 0$
$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로
만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일
$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$
$\rightarrow (x+1)^2 + 1 \ge 1$
$\therefore$ 모든 실수
$\therefore x = 1$

3. 두 점 $A(-1,\ -2), B(2,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P, $1:2$ 로 외분하는 점을 Q라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

내분점, 외분점 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{1\times 2 + 2\times(-1)}{3}, \frac{1\times 4 + 2\times(-2)}{3}\right) = (0, 0)$$

$$Q = \left(\frac{1\times 2 - 2\times(-1)}{1-2}, \frac{1\times 4 - 2\times(-2)}{1-2}\right) = (-4, -8)$$

$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$

4. 직선 $y=-x+1$의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

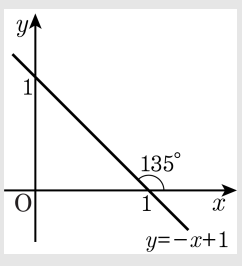
▷ 정답: 기울기 -1

▷ 정답: y절편 1

▷ 정답: x축의 양의 방향 $135°$

해설

기울기 -1, y 절편 1,
x 축의 양의 방향과
이루는 각 $135°$



5. 함수 $f(x) = ax + 1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$ ② $(1, 1)$ ③ $(0, 1)$

④ $(-1, 0)$ ⑤ $(0, -1)$

해설

함수 $f(x) = ax + 1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

6. 원점을 지나고, 점 $(2,\ 1)$에서의 거리가 1인 직선의 방정식은? (단, x 축은 제외)

① $y=\frac{2}{3}x$ ② $y=-\frac{2}{3}x$ ③ $y=\frac{1}{3}x$
④ $y=-\frac{4}{3}x$ ⑤ $y=\frac{4}{3}x$

해설

원점을 지나는 직선을
$y=kx(k\neq 0)$이라 하면,
$(2,\ 1)$에서의 거리가 1이므로

$$\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1,\ |2k-1|=\sqrt{k^2+1},\ k(3k-4)=0$$

$$k=\frac{4}{3}\ (\because k\neq 0)$$

$$\therefore\ y=\frac{4}{3}x$$

7. 복소수 $z = a + bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i \cdots ㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b = 3a$

$\therefore\ b = \frac{3}{2}a$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

8. 원 $x^2+y^2-4x+6y-1=0$ 과 같은 중심을 갖고, 점 $(1,\ 2)$ 를 지나는 원의 반지름을 r 이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 26

해설

준 식에서 $(x-2)^2+(y+3)^2=14$ 이므로
중심은 $(2,\ -3)$ 이다.
구하는 원의 반지름을 r 라 하면
$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$ 이고,
이 원이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-2)^2+(2+3)^2=r^2$
$\therefore r^2=26$

9. 두 점 $(2,\ 1),\ (-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+2)^2+(y+1)^2=29$ ② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

③ $(x-2)^2+(y-1)^2=29$ ④ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}$

⑤ $x^2+y^2=4$

해설

원의 중심은 $\left(\frac{2-3}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 이고,

반지름은 $\frac{\sqrt{(2+3)^2+(1+1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$ 이다.

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{29}{4}$

10. 세 점 $(0,\ 0),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1)$을 지나는 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (단, $r>0$)라고 할 때, $a+b+r$ 의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

구하는 원의 방정식을
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓는다.
세 점 $(0,\ 0),\ (2,\ 0),\ (1,\ 1)$은
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$
위의 점이므로 등식이 성립한다.
따라서 세 점을 대입한 식을 연립시키면
구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-2x=0$ 이다.
$x^2+y^2-2x=0$ 을 정리하면
$(x-1)^2+y^2=1$ 이다.
따라서 $a=1,\ b=0,\ r=1$ 이므로
$a+b+r=2$ 이다.

11. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 위치관계 중 옳은 것은?

① 서로 외부에 있다

② 외접한다

③ 두 점에서 만난다

④ 내접한다

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$을 정리하면
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
$x^2+y^2-6x-8y=0$을 정리하면
$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$
$\sqrt{3-1^2+(4-1)^2}<5-1$
따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

12. 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 (a,b) 에서의 접선이 점 $(6,6)$ 을 지날 때, ab 의 값은?

① $-\frac{27}{8}$ ② $-\frac{15}{8}$ ③ $-\frac{7}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{15}{8}$

해설

원 위의 점 (a,b) 에서의 접선의 방정식은
$ax+by=9$ 이고
이 접선이 점 $(6,\ 6)$ 을 지나므로
$6a+6b=9 \quad \therefore a+b=\frac{3}{2}$
또, 점 (a,b) 는 원 위의 점이므로
$a^2+b^2=9$
이때, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 에서
$9=\frac{9}{4}-2ab \quad \therefore ab=-\frac{27}{8}$

13. 직선 $y = 3x - 3$의 그래프를 직선 $y = x$에 대칭이동한 직선의 방정식은?

① $y = 3x + 1$ ② $y = \frac{1}{3}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{3} + 1$

④ $y = \frac{1}{3}x - 1$ ⑤ $y = 3x - 1$

해설

$y = x$대칭은 $x \to y$좌표로, $y \to x$를 대입한다.

14. 점 $(-1, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시켰다. 이것을 x 축으로 a, y 축으로 b 만큼 평행이동시킨 후 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰더니 점 $(1, 2)$ 가 되었다. $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

점$(-1,\ 2)$ 를 x 축에 대하여
대칭이동하면 $(-1, -2)$
이것을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(1, -2)$
이것을 다시 x 축으로 a,
y 축으로 b 만큼 평행이동하면
$(1 + a,\ -2 + b)$
원점에 대하여 대칭이동하면 $(-1 - a,\ 2 - b)$
이것이 점 $(1, 2)$ 가 되려면 $a = -2,\ b = 0$
$\therefore a + b = -2$

15. 부등식 $3x+4y \geq 10$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 x^2+y^2 의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 20

해설

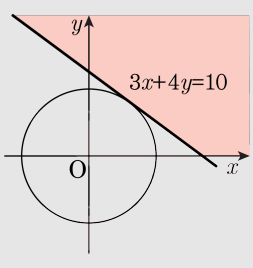
부등식의 영역을 그리면 색칠한 부분과 같고,

$x^2+y^2=k$ 라고 하면 원과 직선이 접할 때 k 가 최소이다.

⇒ 원과 직선이 접하면원 중심과 직선 사이거리는 반지름과 같다.

$\Rightarrow \dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{k}$

$\Rightarrow k=4$



16. 모든 실수 x에 대하여 부등식$(k-2)x^2+2(k-2)x+1>0$이 성립할 때, 실수 k값의 범위가 $m \le k < n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m+n=5$

해설

① $k=2$일 때 $1>0$ $\therefore$성립한다.

② 아래로 볼록 $(k-2)>0$, $k>2$

③ $\frac{D}{4}<0$에서 $(k-2)^2-(k-2)<0$

$(k-2)(k-3)<0$, $2<k<3$

①을 만족하거나 ②와 ③)을 동시에 만족해야 하므로 $2 \le k < 3$

$\therefore m=2, n=3$, $m+n=5$

17. 모든 실수 x 에 대하여 곡선 $y = x^2 + (k-2)x + 3$ 의 그래프가 직선 $y = x + 2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $1 < k < 5$ ② $1 \le k \le 5$ ③ $k \le -1, k \le 5$

④ $k < 1, k > 5$ ⑤ $k \le 1, k \ge 5$

해설

곡선의 그래프가 직선의 그래프보다 위쪽에 있으려면 $x^2 + (k-2)x + 3 > x + 2$

$\therefore\ x^2 + (k-3)x + 1 > 0$

위의 부등식이 항상 만족해야 하므로

방정식 $x^2 + (k-3)x + 1 = 0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다.

$D = (k-3)^2 - 4 < 0$

$k^2 - 6k + 5 < 0$

$\therefore\ 1 < k < 5$

18. 두 점 $\mathrm{A}(3,5)$, $\mathrm{B}(4,-2)$에서 같은 거리에 있고 x축 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-7,0)$ ② $(-4,0)$ ③ $(0,0)$
④ $(1,0)$ ⑤ $(3,0)$

해설

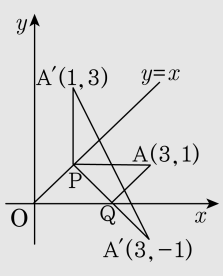
P $(a,0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로
$(a-3)^2 + 5^2 = (a-4)^2 + 4,\ a = -7$
$\therefore$ P $= (-7,0)$

19. 정점 $A(3,1)$ 과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A 의 $y=x$ 에 대한 대칭점을 A' ,



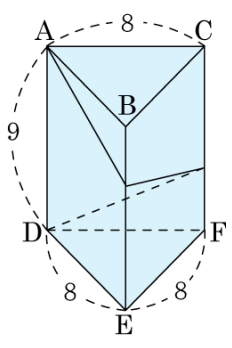
점 A 의 x 축에 대한 A'' 라 하면,

$\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''}ge\overline{A'A''}$

$\overline{A'A''}=\sqrt{(3-1)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

20. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2 + 9^2} = \sqrt{576 + 81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$

21. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0, \quad 3x-4y+6=0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1,-2)$ 에서 직선
$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는

$$d=\frac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

22. 점$(3,\ 4)$를 직선 $x-y+2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(1,\ 5)$　② $(2,\ 5)$　③ $(3,\ 5)$

④ $(4,\ 5)$　⑤ $(6,\ 5)$

해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 4)$와 $(a,\ b)$의 중점은 $x-y+2=0$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $x-y+2=0$은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+4}{2}\right)$를 $x-y+2=0$에 대입하면

$a-b=-3\cdots①$

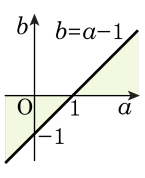
수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로 $x-y+2=0$의 기울기가 1일때 두점을 지나는 기울기는 -1이다.

$\frac{b-4}{a-3}=-1$, $a+b=7\cdots②$

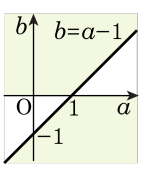
따라서 ①, ②를 연립하면 $a=2, b=5$

23. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$의 그래프가 두 점 $(0,0)$, $(1,1)$ 사이를 지난다. 이 때, 점 (a,b)의존재 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 제외)

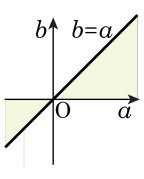
①



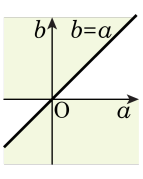
②



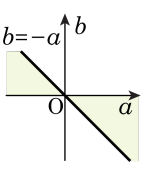
③



④



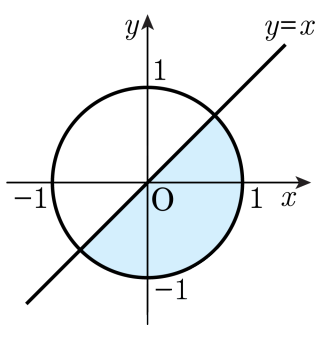
⑤



해설

$f(x,y) = x^2 - ax + b - y$로 놓으면
$f(x,y) = 0$이 두 점 $(0,0)$, $(1,1)$ 사이를 지나므로
$f(0,0)f(1,1) < 0$, $b(-a+b) < 0$
즉, $b > 0$, $-a+b < 0$ 또는 $b < 0$, $-a+b > 0$이므로
$b > 0$, $b < a$ 또는 $b < 0$, $b > a$
따라서, 이 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

24. 다음 중 그림의 빗금친 부분을 나타내는 부등식은? (단, 경계선 포함)



① $\begin{cases} y \geq x \\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} y \leq x \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} y \geq x \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

④ $(x-y)(x^2+y^2-1) \leq 0$

⑤ $(x-y)(x^2+y^2-1) \geq 0$

해설

$x^2+y^2=1$의 내부와 $y=x$의 아랫부분이므로

$\begin{cases} y \leq x \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

25. 연립부등식 $y \geq x^2$, $y \leq x+2$ 를 만족하는 x, y의 값에 대하여 $3x+y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{31}{4}$

해설

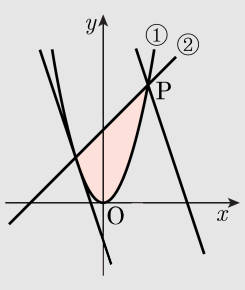
$y = x^2 \cdots ①$

$y = x+2 \cdots ②$

그림에서 보듯이 직선을 $3x+y=k$라 두면

최댓값은 주어진 직선이 P를 통과할 때이며

최솟값은 $y=-3x+k$가 ①과 접할때이다.



$x^2 = -3x+k$, $x^2+3x-k=0$에서

$D = 9+4k = 0$, $k = -\frac{9}{4}$ 일때 최솟값

P(2, 4)를 지날 때의 $k=10$(최댓값)

$\therefore\ M+m = 10+\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{31}{4}$