1. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$　② $x<-5$　③ $x>-5$

④ $x<5$　⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠

㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡

㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\ -a+2b=a+b$

$\therefore 2a=b\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0\ \therefore a<0$

㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면

$(2a-3a)x+a+4a>0,\ -ax>-5a\ \therefore x>5$

2. 이자부등식 $x^2 - 2kx + 2k \leq 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \leq k \leq 0$
② $-2 < k < 0$
③ $0 \leq x \leq 2$
④ $0 < k < 2$
⑤ $k < 0$, 또는$k > 2$

해설

주어진 이자부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0,\ \ k(k-2) < 0$
$\therefore 0 < k < 2$

3. 세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(4,3)$, $\mathrm{C}(a,0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$가 성립할 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(a-2)^2+1^2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(a-4)^2+3^2}$

$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$

$(a-2)^2+1 = (a-4)^2+9$

$4a = 20$

$\therefore\ a = 5$

4. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4)$, $\mathrm{B}(5,\ -5)$를 이은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 직선 $y=2x+k$ 위에 있을 때, 상수 k의 값은?

① -8　② -7　③ -6　④ -5　⑤ -4

해설

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times5+1\times(-1)}{2+1},\ \dfrac{2\times(-5)+1\times4}{2+1}\right)=(3,\ -2)$이다.

점 $(3,\ -2)$가 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$-2=6+k \quad \therefore\ k=-8$

5. A(1, 4), B(3, 3) 인 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 (6, 7) 일 때, 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

① (14, 14) ② (14, 5) ③ (4, 14)
④ (5, 17) ⑤ (6, 20)

해설

C 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 할 때, 무게중심 구하는 공식을 이용하면,
$\left(\frac{1+3+x}{3},\ \frac{4+3+y}{3}\right) = (6,\ 7)$
$\therefore\ (x,\ y) = (14,\ 14)$

6. 세 점 $\mathrm{A}(1, 4)$, $\mathrm{B}\ (-1, 2)$, $\mathrm{C}\ (5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2 ② 8 ③ 10 ④ −2 ⑤ −4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

기울기 $= \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

7. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답: 사분면

▷ 정답: 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

8. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$　② $-\frac{3}{23}$　③ $-\frac{1}{23}$　④ $\frac{2}{23}$　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는

각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로

$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우

$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$

이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$

따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

9. 두 직선 $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$의 교점과 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $x-y+1=0$ ② $x+y+1=0$ ③ $x-y-1=0$
④ $x-y+2=0$ ⑤ $x+y+2=0$

해설
두 직선 $2x+y-4=0$과 $x-2y+3=0$의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$2x+y-4+k(x-2y+3)=0\cdots$ ㉠
이때, ㉠이 점 $(2,3)$을 지나므로 $3-k=0$
$\therefore\ k=3$
$k=3$을 ㉠에 대입하여 정리하면 $x-y+1=0$

10. 두 점 A$(-5,\ 1)$, B$(3,\ 7)$ 을 지름의 양끝으로 하는 원의 중심을 $(a,\ b)$, 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $a+b+r$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

A$(-5,\ 1)$ B$(3,\ 7)$ 이 지름의 양끝이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 중심의 좌표와 같다.
중점
$\mathrm{M} = \left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{1+7}{2}\right) = (-1,\ 4) = (a,\ b)$
반지름
$r = \sqrt{(-5+1)^2+(1-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
$\therefore\ a+b+r = -1+4+5 = 8$

11. 방정식 $x^2 + y^2 + kx - 2y + 10 = 0$ 이 원을 나타낼 때, k 의 범위를 구하면?

① $-4 < k < 5$　　② $k < -4$ 또는 $k > 5$

③ $-6 < k < 6$　　④ $k < -6$ 또는 $k > 6$

⑤ $-4 < k < 6$

해설

준 식 : $\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{k^2}{4} - 9$

중심이 $\left(-\frac{k}{2},\ 1\right)$,

반지름이 $\sqrt{\frac{k^2}{4} - 9}$ 인 원이 되려면

$\frac{k^2}{4} - 9 > 0$

$\therefore\ k^2 - 36 > 0$

$\therefore\ (k+6)(k-6) > 0$

$\therefore\ k < -6$ 또는 $k > 6$

12. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

13. 직선 $y = -2x + a$가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$에 의하여 잘려지는 선분의 길이를 최대로 하는 a의 값은 ?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ 에서
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
직선 $y = -2x + a$ 가 원의 중심 (2, 1) 을 지날 때, 잘린 선분의 길이가 최대이므로
$a = 2 \times 2 + 1 = 5$

14. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

15. 점 $(2,\ k)$ 가 곡선 $y = x^2 + 3$ 의 윗부분에 있을 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k > 7$
② $k < 7$
③ $k > -7$
④ $k < -7$
⑤ $k > 1$

해설

점$(2,\ k)$ 가 곡선 $y = x^2+3$ 의 윗부분에 있으므로, $k > 2^2+3 = 7$
$\therefore\ k > 7$

16. 두 함수 $f(x) = mx^2 - 4x + 4$, $g(x) = -2x^2 + 2mx$ 가 있다. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) < y < f(x)$ 를 만족시키는 실수 y 가 존재할 때, 실수 m 의 범위를 정하면?

① $-3 < m < 0$ ② $-2 < m \leq 3$ ③ $0 \leq m < 2$

④ $-2 \leq m < 2$ ⑤ $-2 < m \leq 4$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) - g(x) > 0$ 을
만족시키는 조건을 구한다.
$f(x) - g(x) = (m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 > 0$
(i) $m + 2 = 0$ 이면 $f(x) - g(x) = 4 > 0$
따라서 $m = -2$ 일 때, 성립한다.
(ii) $m + 2 > 0$, $\frac{D}{4} < 0$ 에서
$-2 < m < 2$
(i), (ii) 에서 $-2 \leq m < 2$

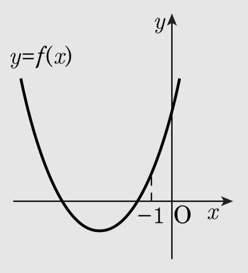
17. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

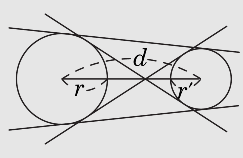
(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

18. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 4 개

해설



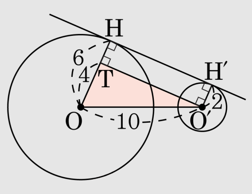
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.
두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면
$r + r' = 5, r \sim r' = 1$ $d = 9$ 이므로
$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

19. 다음 두 원 $x^2+y^2=36$, $(x-6)^2+(y-8)^2=4$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이의 합을 구하면?

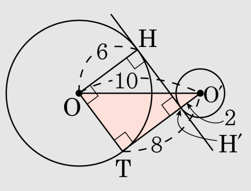
① $2+\sqrt{19}$　　② $1+3\sqrt{11}$　　③ $\sqrt{13}+\sqrt{31}$
④ $6+2\sqrt{21}$　　⑤ $5+4\sqrt{51}$

해설

두 원의 반지름의 길이는 각각 6, 2 이고, 두 원의 중심을 각각 O, O′ 이라고 할 때, O(0, 0), O′(6, 8) 이므로 중심거리는 $\sqrt{6^2+8^2}=10$ 이다. (i) 다음 그림과 같이 점 O′ 에서 $\overline{\mathrm{OH}}$ 에 내린 수선의 발을 T라고 하면



$\overline{\mathrm{TH}}=\overline{\mathrm{O'H'}}=2$ 이므로
$\overline{\mathrm{OT}}=6-2=4$
한편, △OTO′ 은 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{O'T}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{OT}}^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$
이 때, $\overline{\mathrm{HH}}=\overline{\mathrm{O'T}}$ 이므로 구하는 공통외접선의 길이는 $2\sqrt{21}$
(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면
$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=6$ 이므로 $\overline{\mathrm{O'T}}=6+2=8$



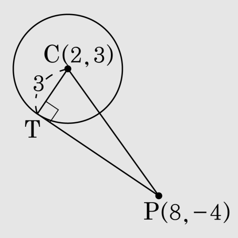
한편, △OTO′ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$
이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 6
(i), (ii) 에서 구하는 길이의 합은 $2\sqrt{21}+6$

20. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ 밖의 한 점 $P(8, -4)$에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{19}$ ② $2\sqrt{19}$ ③ $3\sqrt{19}$ ④ $4\sqrt{19}$ ⑤ $5\sqrt{19}$

해설

다음 그림과 같이 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(8, -4)$에서
원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$에 접선을 그어 그 접점을 T, 이 원의 중심을 C라고 하면 $\triangle\mathrm{PTC}$는 $\angle\mathrm{PTC} = 90°$인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여



$\overline{\mathrm{PT}}^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 - \overline{\mathrm{CT}}^2$

$= \left\{(8-2)^2 + (-4-3)^2\right\} - 3^2 = 76$

$\overline{\mathrm{PT}} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

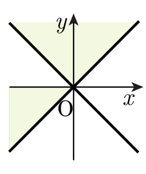
21. 원 $(x+2)^2+(y-4)^2=1$를 직선 $y=mx+n$에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2=r^2$이 된다. 이때, $m+n+r$의 값을 구하면? (단, $r>0$)

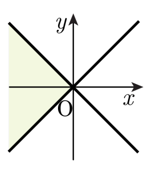
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

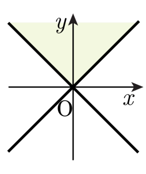
해설

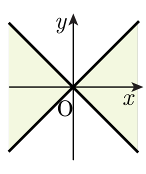
직선에 대한 대칭이동은 중점 조건과 수직 조건을 이용한다.
두 원 $(x+2)^2+(y-4)^2=1$, $x^2+y^2=r^2$의 중심이
각각 $(-2,\ 4)$, $(0,\ 0)$이므로 두 점을 이은 선분의 중점 $(-1,\ 2)$가
직선 $y=mx+n$ 위의 점인 조건에서
$2=-m+n\cdots\cdots$ ㉠
또, 두 점 $(-2,\ 4)$, $(0,\ 0)$을 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$이 수직인 조건에서
$\frac{-4}{2}\times m=-1$
$\therefore m=\frac{1}{2}$
$m=\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면 $n=\frac{5}{2}$
$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
원을 대칭이동할 때 원의 중심은 이동하지만
원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $r=1$
따라서 $m+n+r=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+1=4$

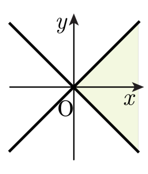
22. x 와 y 는 $(x+y)(x-y) \neq 0$ 인 실수이고 $\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = -\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$ 가 성립할 때, 점 $(x,\ y)$ 가 존재하는 영역을 좌표평면 위에 검게 나타내면? (단, 점선은 제외)

①


②


③


④


⑤


해설

$(x+y)(x-y) \neq 0$ 일 때

$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = -\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}$ 가 성립하는 경우는

$x-y<0,\ x+y>0$ 일 때 뿐이다.

$\therefore\ y>x,\ y>-x$

23. 부등식 $x^2 + y^2 \leq 2$ 의 영역이 부등식 $y < -2x + k$ 의 영역에 포함되기 위한 k 의 값 중 최솟값은?

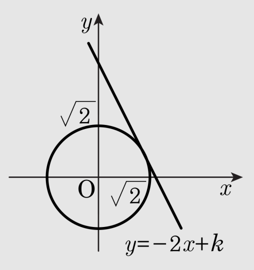
① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{5}$　　③ $\sqrt{10}$　　④ $\sqrt{15}$　　⑤ $\sqrt{20}$

해설

부등식 $x^2 + y^2 \leq 2$ 은 점 $(0,\ 0)$ 이 중심이고 반지름이 $\sqrt{2}$ 인 원과 원의 내부이고, $y < -2x + k$ 는 기울기가 -2 이고 y 절편이 k 인 직선의 아랫부분이다.
따라서 기울기가 -2 인 직선이 그림과 같이 원의 접선이 될 때, 부등식 $x^2 + y^2 \leq 2$ 의 영역이 부등식 $y < -2x + k$ 의 영역에 포함된다.

따라서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$ 일 때, 최솟값이 된다.

$\therefore$ 최솟값은 $\sqrt{10}$ 이다.



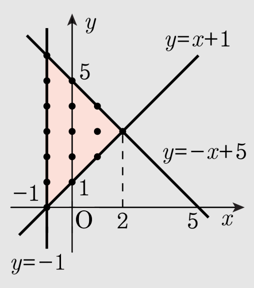
24. 세 부등식 $x \geq -1$, $y \leq -x+5$, $y \geq x+1$을 모두 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

세 부등식을 모두 만족하는 영역은
직선 $x=-1$의 오른쪽(경계선 포함),
직선 $y=-x+5$의 아랫부분(경계선 포함),
직선 $y=x+1$의 윗부분(경계선 포함)
의 공통 부분이므로
다음 그림의 색칠한 부분과 같다.
따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는
16개이다.



25. x, y는 $|x| < 1,\ |y| < 1,\ (x+y)(x-y) \neq 0$인 실수이고

$\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}\right)\left(\sqrt{x+y}\sqrt{x-y} + \sqrt{x^2-y^2}\right) = 0$을 만족할 때,

점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(x+y)(x-y) \neq 0$에서

$x+y \neq 0$이고 $x-y \neq 0 \cdots\cdots$ ㉠

또한,

$\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}}\right)\left(\sqrt{x+y}\sqrt{x-y} + \sqrt{x^2-y^2}\right) = 0$에서

$\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}} = 0$ 또는

$\sqrt{x+y}\sqrt{x-y} + \sqrt{x^2-y^2} = 0$

$\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}} = -\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$ 또는

$\sqrt{x+y}\sqrt{x-y} = -\sqrt{x^2-y^2}$

(i) $\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}} = -\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$일 때,

$x+y > 0,\ x-y < 0\ (\because$ ㉠$)$

(ii) $\sqrt{x+y}\sqrt{x-y} = -\sqrt{x^2-y^2}$일 때,

$\sqrt{x+y}\sqrt{x-y} = -\sqrt{(x+y)(x-y)}$이므로

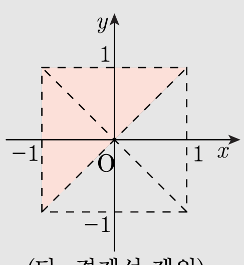
$x+y < 0,\ x-y < 0\ (\because$ ㉠$)$

(i), (ii)에서 $x+y > 0,\ x-y < 0$ 또는

$x+y < 0,\ x-y < 0$

따라서, 두 부등식

$|x| < 1,\ |y| < 1$과 위의 두 부등식을 모두 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분으로 이 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$



(단, 경계선 제외)