

1. 24를 어떤 자연수로 나누면 나누어 떨어진다고 한다. 이 때 어떤 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

어떤 수를 나누어 떨어지게 하는 수를 그 어떤 수의 약수라 한다.
24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

2. 다음 중 4^5 을 나타낸 식은?

① 4×5

② $4 + 4 + 4 + 4 + 4$

③ $5 \times 5 \times 5 \times 5$

④ $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

⑤ 5×4

해설

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ 이다.

3. 120 을 소인수분해한 것 중 알맞은 것은?

- ① $2^3 \times 3 \times 5$ ② $4^2 \times 3 \times 5$ ③ $2 \times 6 \times 10$
④ $2^2 \times 6 \times 5$ ⑤ $2^2 \times 3 \times 10$

해설

$2 \overline{) 120}$
 $2 \overline{) 60}$
 $2 \overline{) 30}$
 $3 \overline{) 15}$
5
 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

4. $2^4 \times 3^2 \times 5$ 의 약수 중에서 두 번째로 큰 수는?

- ① $2^3 \times 3^2 \times 5$ ② $2^3 \times 3^2$ ③ $2^4 \times 3^2 \times 5$
④ $2^4 \times 3 \times 5$ ⑤ $2^4 \times 5$

해설

제일 큰 약수는 자기 자신인 $2^4 \times 3^2 \times 5$ 이고, 두 번째로 큰 수는 가장 작은 소인수인 2 가 한번 덜 곱해진 것이므로, $2^{4-1} \times 3^2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이다.

5. 어떤 수를 13 으로 나누면 6 이 남는 수 중 200 에 가장 가까운 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

어떤 수를 x 라 하고 몫을 k 라 하면 $x = 13 \times k + 6$ 이다.
 $k = 15$ 일 때, $x = 13 \times 15 + 6 = 201$ 이고 $k = 16$ 일 때,
 $x = 13 \times 16 + 6 = 214$ 이다.
따라서 200 에 가장 가까운 수는 201 이다.

6. 두 자연수 A, B 가 있다. A 를 B 로 나누었을 때의 몫이 8, 나머지가 7 이었다. A 를 2 로 나누었을 때의 나머지는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$A = 8 \times B + 7 = 2 \times b \times 4 + 2 \times 3 + 1$ 이므로 나머지는 1 이다.

7. n 이 자연수일 때, $\frac{18}{n}$ 도 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합은?

- ① 20 ② 21 ③ 33 ④ 39 ⑤ 49

해설

18의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이다.
따라서 n 의 값의 합은 $1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$

8. 300 에 가장 가까운 11 의 배수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 297

해설

$11 \times 27 = 297$, $11 \times 28 = 308$ 이므로 300 에 가장 가까운 배수는 297 이다.

9. 연속하는 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 가 15 의 배수가 되는 순서쌍 (a, b, c) 는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, $a \leq 100$)

▶ 답: 개

▶ 정답 : 20 개

해설

$b = a + 1, c = a + 2$ 이므로,
 $a + (a + 1) + (a + 2) = 15k$
 $\rightarrow 3a = 15k - 3 \rightarrow a = 5k - 1 \rightarrow a$ 는 5 로 나누어서 나머지가 4 인 수이다.
 $a \leq 100$ 일 때, a 의 개수는 20 개이다.
 $\therefore$ 순서쌍 (a, b, c) 의 개수=20 개

10. $x = 5^{27} + 1$, $y = 2^{23} + 1$ 일 때 xy 는 몇 자리의 수인가?

- ① 24 자리의 수 ② 25 자리의 수 ③ 26 자리의 수
④ 27 자리의 수 ⑤ 28 자리의 수

해설

$$xy = 5^{27} \times 2^{23} + 5^{27} + 2^{23} + 1$$

이 때 $5^{27} \times 2^{23} > 5^{27} + 2^{23} + 1$ 이므로 $5^{27} + 2^{23} + 1$ 은 자릿수를 고려할 때 생각하지 않는다.

$$\begin{aligned} 5^{27} \times 2^{23} &= 5^{23} \times 2^{23} \times 5^4 \\ &= (5 \times 2)^{23} \times 625 \\ &= 10^{23} \times 625 \end{aligned}$$

따라서 xy 는 26 자리의 수이다.

11. $2^5 = a$, $3^b = 243$ 을 만족하는 a, b 의 값을 각각 구하면?

① $a = 16, b = 4$ ② $a = 16, b = 5$ ③ $a = 32, b = 4$

④ $a = 32, b = 5$ ⑤ $a = 32, b = 6$

해설

$2^5 = 32$, $3^5 = 243$ 이므로 $a = 32$, $b = 5$ 이다.

12. 다음 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수는?

- ① 8 ② 22 ③ 26 ④ 100 ⑤ 103

해설

1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 그 수 자신만을 약수로 가지는 수는 소수이다.
따라서 소수인 것은 103 이다.

13. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ㉠ 83 은 소수이다.
- ㉡ 모든 합성수는 약수가 2 개이다.
- ㉢ 1 은 소수이다.
- ㉣ 15 이하의 소수의 개수는 6 개이다.
- ㉤ 소수가 아닌 자연수는 모두 합성수이다.

해설

- ㉡ 모든 합성수는 약수가 3 개 이상이다.
- ㉢ 1 은 소수도 합성수도 아니다.
- ㉤ 소수가 아닌 자연수는 1, 합성수이다.

14. 다음 중 소인수분해 한 것으로 옳지 않은 것은?

① $124 = 2^2 \times 31$

② $54 = 2 \times 3^3$

③ $72 = 2^3 \times 3^3$

④ $196 = 2^2 \times 7^2$

⑤ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$

해설

③ $2^3 \times 3^2$

15. 792를 소인수분해하면 $a^l \times b^m \times c^n$ 이다. $a < b < c$ 일 때, $a + b + c - l - m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$ 이므로

$$\therefore a + b + c - l - m - n = 2 + 3 + 11 - 3 - 2 - 1 = 10$$

16. 81의 소인수의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$81 = 3^4$$

17. 80 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$80 = 2^4 \times 5$$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 5

18. x 는 $3^7 \times 5^4$ 의 약수 중에서 a^2 의 형태로 나타낼 수 있는 수일 때, x 값의 개수를 구하여라. (단, a 는 자연수)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

$3^7 \times 5^4$ 의 약수 중 $(\text{자연수})^2$ 이 되는 수는
1, 3^2 , $(3^2)^2$, $(3^3)^2$, 5^2 , $(5^2)^2$, $(3 \times 5)^2$,
 $(3 \times 5^2)^2$, $(3^2 \times 5)^2$, $(3^2 \times 5^2)^2$, $(3^3 \times 5)^2$,
 $(3^3 \times 5^2)^2$ 이다.
∴ 12개이다.

19. 24에 가능한 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱해야 하는 자연수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 제곱수가 되려면
 $2 \times 3, 2^3 \times 3, 2^3 \times 3^3, \dots$ 을 곱해야 한다.
따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

20. 다음 중 약수의 개수가 가장 많은 것은?

① $2^3 \times 3^2$

② $3^4 \times 5^3$

③ 96

④ $3 \times 5^2 \times 7$

⑤ 330

해설

① 12개

② 20개

③ 12개

④ 12개

⑤ 16개

21. $2^2 \times 5^{\square} \times 7$ 의 약수의 개수가 18 일 때 $\square$ 안에 들어갈 수는?

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$2^2 \times 5^{\square} \times 7$ 이므로
약수의 개수는
 $(2 + 1) \times (\square + 1) \times (1 + 1) = 18$ (개)
 $\therefore \square = 2$

22. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 $\square$ 안에 들어 갈 수 없는 수를 모두 고르면?

- ① 3 ② 4 ③ 7 ④ 9 ⑤ 16

해설

② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)이다.
④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.

23. 옛날부터 우리나라에는 십간(☰☷)과 십이지(☰☷☷)를 이용하여 매해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2011년은 신묘년이다. 다음 중 신묘년이 아닌 해는?

정	무	기	경	신	임	계	갑
축	인	묘	진	사	오	미	신
정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미	갑신
1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
을	병	정	무	기	경	신	
유	술	해	자	축	인	묘	
을유	병술	정해	무자	기축	경인	신묘	
2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	

- ① 1831년
- ② 1881년
- ③ 1951년
- ④ 2071년
- ⑤ 2131년

해설

십간(☰☷)의 10가지와 십이지(☰☷☷)의 12가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2011년이 신묘년이면 1831년, 1891년, 1951년, 2071년, 2131년도 신묘년이다.

24. $7^x = 343$ 을 만족하는 x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$7^3 = 343$ 이다. 따라서 $x = 3$ 이다.

25. 정화는 10 층 아파트에서 살고 있는데, 엘리베이터가 자주 고장이 난다. 어느 날 엘리베이터 입구에 ‘약수의 개수가 2 개인 층에서만 탑니다.’ 라는 문구가 적혀 있었을 때, 엘리베이터가 서는 층이 아닌 것은?
- ① 2 층 ② 3 층 ③ 5 층 ④ 7 층 ⑤ 9 층

해설

약수의 개수가 2 개인 층은 소수인 층이다. 따라서 10 이하의 소수는 2, 3, 5, 7 이므로 엘리베이터가 서지 않는 층은 9 층이다.

26. 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 고르면?

- ① 소수의 약수는 1 과 자기 자신 2 개이다.
- ② 가장 작은 소수는 2 이다.
- ③ 모든 소수는 홀수이다.
- ④ 두 소수의 곱은 소수이다.
- ⑤ 1 은 소수도 합성수도 아니다.

해설

- ㉠ 모든 소수는 홀수이다 → 소수 중 2 는 짝수이다.
- ㉡ 두 소수의 곱은 소수이다 → 두 소수의 곱은 $2 \times 3 = 6$, $3 \times 5 = 15$ 등으로 합성수이다.

27. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을 a , 소인수의 지수의 합을 b 라 하자. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \\ &a = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41 \\ &b = 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 \\ &\therefore a - b = 41 - 20 = 21 \end{aligned}$$

28. 자연수 180을 소인수분해 하였을 때, 소인수들의 곱을 구하면?

① 15

② 18

③ 24

④ 25

⑤ 30

해설

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

소인수는 2, 3, 5이므로 $2 \times 3 \times 5 = 30$

29. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

① 9

② 12

③ 36

④ 54

⑤ 100

해설

$$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$$

$$\text{가장 작은 } a = 2 \times 3 = 6$$

$$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$$

$$\therefore A = 12$$

30. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

- ① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

31. 90보다 작은 자연수 x 에 대하여, x 를 17로 나눈 몫이 k 이면 나머지도 k 가 되는 수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 4 개

해설

x 를 17로 나눈 몫이 k 이면 나머지도 k 가 되는 수는 $17k+k=18k$ 로 쓸 수 있다.

따라서 90 보다 작은 수 중 18의 배수가 되는 수는 18, 36, 54, 72 이다.

$$\therefore n(B) = 4$$

32. 네 자리의 자연수 $364\square$ 에 250 을 더하면 9 의 배수가 될 때, $\square$ 안에 알맞은 수는?

① 2

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$364\square + 250$ 이 9 의 배수가 되기 위해서는

$3 + 6 + 4 + \square + 2 + 5 = 20 + \square$ 가 9 의 배수이면 된다.

$\therefore \square = 7$

- 33.** 세 자리수인 자연수 전체에 대해, 4의 배수이지만 5의 배수가 아닌 수의 개수와 3의 배수이지만 5, 6의 배수는 아닌 수의 개수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 300

해설

4의 배수이지만 5의 배수가 아닌 수의 개수는 $225 - 45 = 180$
3의 배수이지만 5, 6의 배수는 아닌 수의 개수는 $300 - 60 - 150 + 30 = 120$
∴ $180 + 120 = 300$

34. 504 를 자연수 a 로 나눈 값이 자연수 b 의 제곱이 될 때, $a + b$ 의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$$\frac{504}{a} = \frac{2^3 \times 3^2 \times 7}{a} = b^2 \text{ 이므로}$$

$a = 2 \times 7, 2^3 \times 7, 2 \times 3^2 \times 7, 504$ 가 가능하다.

$a = 2 \times 7$ 일 때, $b^2 = 6^2 \quad \therefore b = 6$

$a = 2^3 \times 7$ 일 때, $b^2 = 3^2 \quad \therefore b = 3$

$a = 2 \times 3^2 \times 7$ 일 때, $b^2 = 2^2 \quad \therefore b = 2$

$a = 504$ 일 때, $b = 1$

$\therefore (a + b \text{의 최소값}) = 14 + 6 = 20$

35. 4719를 3개의 자연수의 곱으로 나타내는 모든 방법의 수를 구하여라.
(단, $x \times y \times z$ 와 $x \times z \times y$ 와 같이 곱하는 순서만 다른 식도 서로 다른 방법이다.)

▶ 답: 가지

▶ 정답 : 12가지

해설

$$4719 = 3 \times 1573 = 3 \times 11 \times 143 = 3 \times 11 \times 11 \times 13$$

따라서,

4719 를 3 개의 자연수의 곱으로 나타내는 모든 방법의 수

i) (3, 11, 13)

3 개의 인수를 나열하는 방법의 수 = $3 \times 2 = 6$

ii) $(3 \quad 11 \quad 11) \quad (11 \quad 11 \quad 13)$

ii) (3, 11, 11), (11, 11, 13)

3 개의 인

$$3 \times 2 = 6$$

36. 자연수 n 의 약수의 개수를 $S(n)$ 이라 정의한다. $\frac{S(n)}{S(17)} = S(16)$ 을 만족하는 n 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$S(17) = 2, S(16) = 5$ 이므로, $S(n) = 10$ 이다.
 $n = a^x \times b^y$ 라 두면, $(x+1) \times (y+1) = 10$ 이므로,
 $(x,y) = (1,4), (4,1)$ 이다.
이러한 x,y 의 값을 만족하는 수 중 가장 작은 수는
 $2^1 \times 3^4, 2^4 \times 3^1$ 중의 하나이다.
 $\therefore n$ 중에서 가장 작은 수= 48

37. 자연수 a 에 대하여 $P(a)$ 는 약수의 개수를 나타낸 다고 할 때,

$P(1200) = P(3^5 \times 7^n)$ 에서 n 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$ 이므로

약수의 개수는 $(4+1) \times (1+1) \times (2+1) = 30$ (개)

$3^5 \times 7^n$ 의 약수의 개수는

$(5+1) \times (n+1) = 6(n+1)$ (개)

$6 \times (n+1) = 30$ 이므로 $n+1 = 5$ 이다.

$\therefore n = 4$

38. $2^3 \times 5 \times \square \times 7$ 의 약수의 개수가 32 개라고 한다. $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 작은 수부터 2개를 써라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 11

해설

$2^3 \times 5 \times \square \times 7$ 의 약수의 개수가 32 개이면

$\square$ 가 가장 작은 소인수 3 인 경우와 그 다음 작은 소인수인 11 이 있다.

39. $3^n(2^n + 2^{n+1})$ 의 약수의 개수가 30 개일 때, 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} 3^n(2^n + 2^{n+1}) &= 3^n(2^n + 2 \times 2^n) \\ &= 3^n \times 3 \times 2^n \\ &= 3^{n+1} \times 2^n \end{aligned}$$

따라서 약수의 개수는 $(n+2)(n+1) = 30$ 이므로

$$n+2 = 6, n+1 = 5$$

$$\therefore n = 4$$

40. a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다.
 x 는 1 이상이고 150 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x 의 값의 개수는?

- ① 6개 ② 5개 ③ 4개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3개인 수는
(소수)²이므로
150 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2$ 의 5개