1. 두 방정식 $x^2-4x-12=0$, $x^2-6x+p=0$ 을 동시에 만족하는 해가 있을 때, $-p$ 의 값은? (단, $p \neq 0$)

① 4 ② 16 ③ -16 ④ 8 ⑤ -8

해설

$x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$

$x=-2, 6$

1) $x=-2$ 가 $x^2-6x+p=0$ 의 해일 때,

$4+12+p=0 \therefore p=-16$

2) $x=6$ 이 $x^2-6x+p=0$ 의 해일 때,

$36-36+p=0 \therefore p=0$

따라서 $p \neq 0$ 이므로 $-p=-(-16)=16$ 이다.

2. 이차방정식 $3x^2 + ax + 12 = 0$ 이 음수의 중근을 가질 때, a 의 값을 구하면?

① -12 ② -9 ③ 4 ④ 9 ⑤ 12

해설

$3x^2 + ax + 12 = 0$

$x^2 + \frac{a}{3}x + 4 = 0$, $(x+2)^2 = 0$

$\frac{a}{3} = 4$ $\therefore$ $a = 12$

3. 1 부터 6 까지의 정수가 적힌 정육면체와 -1 부터 -6 까지의 정수가 적힌 정육면체를 굴려서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 이차방정식 $ax^2+4bx+a=0$ 이 실근을 갖지 않을 확률을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{6}$

해설

이차방정식 $ax^2+4bx+a=0$ 이 실근을 갖지 않을 조건은
$\frac{D}{4}<0$ 이므로
$\frac{D}{4}=(2b)^2-a^2<0$, $4b^2<a^2$
$(2b-a)(2b+a)<0$
이 때 $a>0$ 이고 $b<0$ 이므로
$(2b-a)<0$ 는 항상 성립하여 $(2b+a)>0$ 이어야 한다.
따라서 $(a,\ b)=(3,\ -1),\ (4,\ -1),\ (5,\ -1),\ (6,\ -1),$
$(5,\ -2),\ (6,\ -2)$ 이므로
확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ 이다.

4. 1 보다 큰 자연수 a, b 에 대하여 이차방정식 $ax^2 - a^2bx + 744 = 0$ 의 한 근이 2^a 이고 나머지 한 근은 두 자리의 소수일 때, a, b 를 두 근으로 가지고, 이차항의 계수가 1 인 x 에 관한 이차방정식의 계수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

두 근을 α, β 라 하면

$\alpha + \beta = ab$

$\alpha\beta = \frac{744}{a}$

$\alpha\beta = \frac{744}{a} = \frac{2^3 \times 3 \times 31}{a}$ 에서 두 근 중 한 근은 두 자리의 소수이므로 31 이고

나머지 한 근은 2^a 이므로

$\therefore\ a = 3$

$\therefore\ b = 13$

따라서 구하고자 하는 이차방정식은 $x^2 - 16x + 39 = 0$ 이므로 계수의 합은 $1 - 16 + 39 = 24$ 이다.

5. 두 근이 연속하는 짝수인 다음 이차방정식에서 모든 k의 값의 합은?

$x^2 - kx + 24 = 0$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 근을 α, $\alpha + 2$라 하면
$\alpha + \alpha + 2 = k$
$k = 2\alpha + 2$
$\alpha(\alpha + 2) = 24$
$\alpha^2 + 2\alpha - 24 = 0$
$(\alpha + 6)(\alpha - 4) = 0$
$\alpha = -6$ 또는 $\alpha = 4$
따라서 $k = -10$ 또는 $k = 10$이다.
$\therefore\ (-10) + 10 = 0$

6. 100g 의 물이 들어 있는 그릇에서 일정 양의 물을 퍼낸 다음 퍼낸 물의 양과 같은 양의 소금을 넣어 잘 저었다. 이 소금물에서 처음 퍼낸 물의 양보다 2 배 더 많은 소금물을 퍼내고 퍼낸 소금물의 양과 같은 양의 소금을 넣었더니 28% 의 소금물이 되었다면, 처음 퍼낸 물의 양은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 : ______ g

▷ 정답 : 10 g

해설

처음 퍼낸 물의 양을 xg 이라 하면 100g 의 물이 들어 있는 그릇에서 xg 의 물을 퍼낸 다음 xg 의 소금을 넣었으므로 x% 의 소금물 100g 이 된다.
또, $2x$g 의 소금물을 퍼내고 $2x$g 의 소금을 넣었으므로 이 소금물 100g 에 녹아 있는 소금의 양은

$$\frac{x}{100} \times 100 - \frac{x}{100} \times 2x + 2x = \frac{28}{100} \times 100$$

$300x - 2x^2 = 2800$

$x^2 - 150x + 1400 = 0$

$(x-10)(x-140) = 0$

$\therefore\ x = 10$ 또는 $x = 140$

그런데 100g 의 물에서 더 많은 양의 물을 퍼낼 수는 없으므로 처음 퍼낸 물의 양은 10g 이다.

7. 세 자리 자연수가 있다 각 자리의 수의 합은 10이고, 가운데 자리의 수의 4배는 다른 두 자리의 수의 합과 같다.
또, 이 자연수의 각 자리의 수를 거꾸로 늘어놓아 얻은 자연수는 처음 자연수보다 198만큼 크다. 처음 자연수는?

① 235 ② 325 ③ 532 ④ 523 ⑤ 358

해설

일, 십, 백의 자리의 수를 각각 p, q, r라 하면
p, q는 0이상 10미만의 정수이고
r은 1이상 10미만의 자연수이다.

$$\begin{cases} p+q+r=10 \cdots ㉠ \\ 4q=p+r \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡에서 $q=2$
$100p+20+r=100r+20+p+198$
$p-r=2 \cdots ㉢$
$q=2$를 ㉠에 대입하면 $p+r=8 \cdots ㉣$
㉢ + ㉣에서 $p=5$, $r=3$
따라서 구하는 수는 325이다.

8. 다음 식의 값을 구하여라.

$3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+\cdots}}}$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

주어진 식을 x 라 하면

$x=3+2\sqrt{x}$, $\sqrt{x}>0$ 이므로 $x>3$

$x-3=2\sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면

$x^2-6x+9=4x$

$x^2-10x+9=0$

$(x-1)(x-9)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=9$

$\therefore$ $x>3$ 이므로 $x=9$

9. 놀이동산의 입장 요금을 x% 인상하면 입장객은 $0.8x$% 줄어든다고 한다. 요금을 올리기 전보다 수입이 10% 가 줄어들 때의 요금 인상률은?

① 40% ② 45% ③ 50% ④ 55% ⑤ 60%

해설

인상 전의 입장요금을 A원, 입장객 수를 B명, 요금 인상률을 x% 라 하면

인상 후의 요금은 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 입장객 수는 $B\left(1-\frac{8x}{1000}\right)$명, 입장 수입은 $A\times B\times\left(1-\frac{10}{100}\right)$

$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\times B\left(1-\frac{8x}{1000}\right)=A\times B\times\left(1-\frac{10}{100}\right)$

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{8x}{1000}\right)=\left(1-\frac{10}{100}\right)$

$x^2-25x+1250=0$

$(x-50)(x+25)=0$

$x>0$ 이므로 $x=50$

10. 직선 $x = 1 - y$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = px^2$, $y = qx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 B, C, y 축과 만나는 점을 D 라 하고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CD}} = 3 : a : 1$ 의 비례식이 성립되기 위한 상수 p, q 에 대하여 pq 의 값을 구하여라.(단, $q > p > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 60

해설

A(1, 0), D(0, 1) 이고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CD}} = 3 : a : 1$ 이고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 이므로

비례식 $1 : \frac{1}{2} = (3k + ak + k) : (k + ak)$ 이 성립한다.

$\therefore\ a = 2$

따라서 점 B 의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, C $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$

$y = px^2$ 가 B $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 를 지나므로 $p = 2$

$y = qx^2$ 가 C $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$ 를 지나므로 $q = 30$

$\therefore\ pq = 60$

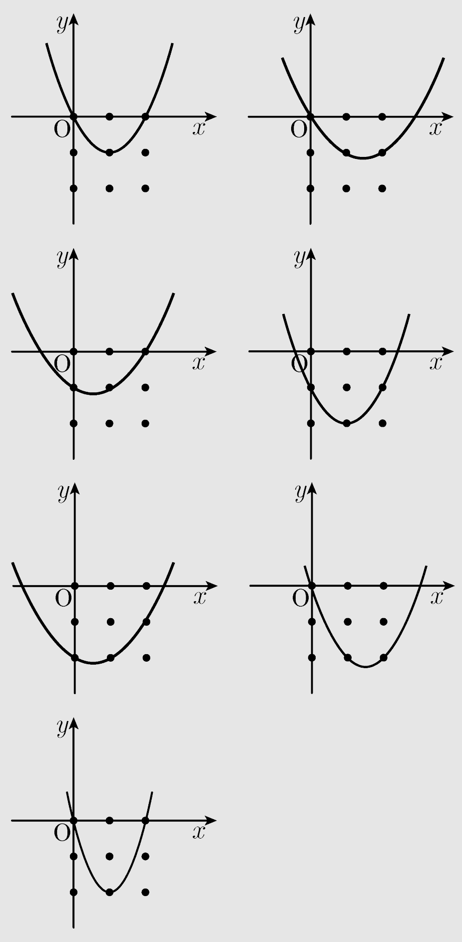
11. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \le y \le \frac{1}{2}$의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 3개를 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 14 개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2이고
y 좌표가 될 수 있는 정수는 −2, −1, 0이다.
포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 7개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 7개의 포물선을 그릴 수 있다.
따라서 구하는 포물선의 개수는 14개이다.

12. 이차함수 $y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 36 가 되는 모든 k 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4 = (x - 3k)^2 - 4$

$\therefore$ A$(3k,\ -4)$, B$(0,\ 9k^2 - 4)$

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 에서 $x = 3k - 2$ 또는 $3k + 2$

$\therefore$ C$(3k - 2,\ 0)$, D$(3k + 2,\ 0)$

$k > 0$ 이므로 y 절편, 두 개의 x 절편 모두 0 보다 크다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \square\mathrm{ABCD} &= \triangle\mathrm{CAD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times (3k + 2 - 3k + 2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (9k^2 - 4)(3k + 2 - 3k + 2) \\ &= 36\end{aligned}$$

이 식을 정리하면 $8 + 2 \times (9k^2 - 4) = 36$

$k^2 = 2 \qquad \therefore\ k = \pm\sqrt{2}$

따라서 k 값의 곱은 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ 이다.

13. 함수 $f(x)=\dfrac{-4}{\sqrt{px^2+2x-p+3}}$ 가 최솟값을 가질 때, 정수 p 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

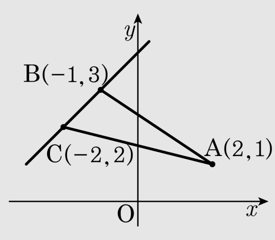
분모가 항상 음수이므로 주어진 함수가 최소가 될 때는 함수 $y=px^2+2x-p+3\cdots$㉠ 이 최댓값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $p>0\cdots$㉡
$D=p^2-3p+1<0\cdots$㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.
$p^2-3p+1<0$ 에서 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<p<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
따라서 정수 p 의 최댓값은 2 이다.

14. 두 점 A(2, 1), B(−1, 3)을 연결한 선분 AB 와 직선 $l : y=k(x+2)+2$ 가 공유점을 가질 k 의 범위는 $\alpha \le k \le \beta$ 이다. 이 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$y=k(x+2)+2$, $k(x+2)+2-y=0$ 은
k 에 관계없이 $x+2=0$, $2-y=0$ 의 교점
즉, $(-2,2)$ 를 지난다.
이 점을 C 라 하면 선분 AB 와 직선 l
이
만나려면 그림에서 l 의 기울기 k가
l_2 의 기울기보다 작거나 같아야하고,
l_3 의 기울기보다 크거나 같아야한다.



$$\beta = (l_2 \text{ 의 기울기}) = \frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$$

$$\alpha = (l_3 \text{ 의 기울기}) = \frac{2-1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta = 1+\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

15. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x절편과 y절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는 ?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 8　　⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를
m이라 하면
직선의 방정식은 $y-9=m(x-4)\cdots$ ㉠
x절편 : ㉠에 $y=0$을 대입하면
$-9=m(x-4)$
$\therefore\ x=4-\dfrac{9}{m}$
y절편 : ㉠에 $x=0$을 대입하면
$y-9=-4m$
$\therefore\ y=9-4m$
따라서 x절편, y절편이 모두 정수가 되기위해서는 m의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.
따라서 $m=1,\ 3,\ 9,\ -1,\ -3,\ -9$
$\therefore$ 직선은 6개 존재한다.