1. p, q, r 에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$ 이 성립할 때, p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$

$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$

$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$

양변에 2 를 곱하면

$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$

$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$

$p-q = q-r = r-p = 0$

$\therefore\ p = q = r$

따라서 p, q, r을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

2. 두 방정식 $x^2-4x-12=0$, $x^2-6x+p=0$ 을 동시에 만족하는 해가 있을 때, $-p$ 의 값은? (단, $p \neq 0$)

① 4 ② 16 ③ -16 ④ 8 ⑤ -8

해설

$x^2-4x-12=0$
$(x-6)(x+2)=0$
$x=-2, 6$
1) $x=-2$ 가 $x^2-6x+p=0$ 의 해일 때,
$4+12+p=0 \therefore p=-16$
2) $x=6$ 이 $x^2-6x+p=0$ 의 해일 때,
$36-36+p=0 \therefore p=0$
따라서 $p \neq 0$ 이므로 $-p=-(-16)=16$ 이다.

3. 두 이차방정식 $ax^2-3x+b=0$, $bx^2-3x+a=0$ 이 같은 근을 가질 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2　② 0　③ ±1　④ ±3　⑤ ±5

해설

두 방정식의 같은 근(공통근)을 α 라 하면
$a\alpha^2-3\alpha+b=0\cdots$①
$b\alpha^2-3\alpha+a=0\cdots$②
① − ②를 하면 $(a-b)\alpha^2-(a-b)=0$
$(a-b)(\alpha^2-1)=0$
$a \neq b$ 이므로 $\alpha^2-1=0 \therefore \alpha=\pm1$
$\alpha=1$ 일 때, ① 또는 ②에 대입하면 $a+b=3$
$\alpha=-1$ 일 때, ① 또는 ②에 대입하면 $a+b=-3$
$\therefore a+b=\pm3$

4. 다음은 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0 \ (a \neq 0)$을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2 - ac \geq 0$)

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \, (a \neq 0)$$
$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$$
$$x^2 + \frac{2b}{a}x + ① = -\frac{c}{a} + ①$$
$$(x + ②)^2 = ③$$
$$x = ④ \pm ⑤$$

① $\frac{b^2}{a^2}$ ② $\frac{b}{a}$ ③ $\frac{b^2 - ac}{a^2}$
④ $-\frac{b}{a}$ ⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

해설

$ax^2 + 2bx + c = 0 \, (a \neq 0)$
양변을 a 로 나누고 상수항을 이항하면
$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$,
양변에 $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면
$x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}$
$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$
$x + \frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$
$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$
∴ ⑤가 잘못 되었다.

5. 무리수 x 의 소수 부분을 y 라 하자. 이 때, $x^2 + y^2 = 33$ 을 만족하는 무리수 x 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 + y^2 = 33$ 에서 $y^2 = 33 - x^2$

$0 \le y < 1$ 이므로 $0 \le y^2 < 1$ 에서

$0 \le 33 - x^2 < 1$

$\therefore 32 < x^2 \le 33$

$5^2 < 32 < x^2 \le 33 < 6^2$

따라서 x 의 정수 부분은 5 이다.

$\therefore x = 5 + y$

$x^2 + (x-5)^2 = 33$ 이므로 $x^2 - 5x - 4 = 0$ 이다.

$\therefore$ x 의 합은 근과 계수의 관계에 의해 5 이다.

6. 두 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x = a + 6\sqrt{3},\ y = 1 + 2\sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y = 6$ 이 성립하는 a 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(x-3y)^2 + (x-3y) - 6 = 0$ 에서 $x - 3y = X$로 치환 하면

$X^2 + X - 6 = 0$

$(X+3)(X-2) = 0$

$(x-3y+3)(x-3y-2) = 0$

$x = a + 6\sqrt{3},\ y = 1 + 2\sqrt{3}$ 을 대입하면

$(a-3+3)(a-3-2),\ a(a-5) = 0$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = 5$

$\therefore 0 + 5 = 5$

7. 1 부터 6 까지의 정수가 적힌 정육면체와 -1 부터 -6 까지의 정수가 적힌 정육면체를 굴려서 나온 눈의 수를 각각 a, b라 할 때, 이차방정식 $ax^2 + 4bx + a = 0$ 이 실근을 갖지 않을 확률을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{6}$

해설

이차방정식 $ax^2 + 4bx + a = 0$ 이 실근을 갖지 않을 조건은

$\frac{D}{4} < 0$ 이므로

$\frac{D}{4} = (2b)^2 - a^2 < 0$, $4b^2 < a^2$

$(2b - a)(2b + a) < 0$

이 때 $a > 0$ 이고 $b < 0$ 이므로

$(2b - a) < 0$ 는 항상 성립하여 $(2b + a) > 0$ 이어야 한다.

따라서 $(a,\ b) = (3,\ -1),\ (4,\ -1),\ (5,\ -1),\ (6,\ -1),$

$(5,\ -2),\ (6,\ -2)$ 이므로

확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 이다.

8. 1 보다 큰 자연수 a, b 에 대하여 이차방정식 $ax^2 - a^2bx + 744 = 0$ 의 한 근이 2^a 이고 나머지 한 근은 두 자리의 소수일 때, a, b 를 두 근으로 가지고, 이차항의 계수가 1 인 x 에 관한 이차방정식의 계수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

두 근을 α, β 라 하면

$\alpha + \beta = ab$

$\alpha\beta = \dfrac{744}{a}$

$\alpha\beta = \dfrac{744}{a} = \dfrac{2^3 \times 3 \times 31}{a}$ 에서 두 근 중 한 근은 두 자리의 소수이므로 31 이고

나머지 한 근은 2^a 이므로

$\therefore\ a = 3$

$\therefore\ b = 13$

따라서 구하고자 하는 이차방정식은 $x^2 - 16x + 39 = 0$ 이므로 계수의 합은 $1 - 16 + 39 = 24$ 이다.

9. 100g 의 물이 들어 있는 그릇에서 일정 양의 물을 퍼낸 다음 퍼낸 물의 양과 같은 양의 소금을 넣어 잘 저었다. 이 소금물에서 처음 퍼낸 물의 양보다 2 배 더 많은 소금물을 퍼내고 퍼낸 소금물의 양과 같은 양의 소금을 넣었더니 28% 의 소금물이 되었다면, 처음 퍼낸 물의 양은 얼마인지 구하여라.

▶ 답: ____ g

▷ 정답: 10 g

해설

처음 퍼낸 물의 양을 xg 이라 하면 100g 의 물이 들어 있는 그릇에서 xg 의 물을 퍼낸 다음 xg 의 소금을 넣었으므로 x% 의 소금물 100g 이 된다.
또, $2x$g 의 소금물을 퍼내고 $2x$g 의 소금을 넣었으므로 이 소금물 100g 에 녹아 있는 소금의 양은

$$\frac{x}{100}\times 100-\frac{x}{100}\times 2x+2x=\frac{28}{100}\times 100$$

$300x-2x^2=2800$

$x^2-150x+1400=0$

$(x-10)(x-140)=0$

$\therefore\ x=10$ 또는 $x=140$

그런데 100g 의 물에서 더 많은 양의 물을 퍼낼 수는 없으므로 처음 퍼낸 물의 양은 10g 이다.

10. 어떤 무리수 x가 있다. x의 소수 부분을 y라 할 때 x의 제곱과 y의 제곱의 합이 33이다.
무리수 x의 값은? (단, $x > 0$)

① $x = \dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$　② $x = \dfrac{2+\sqrt{41}}{5}$
③ $x = \dfrac{5+\sqrt{37}}{3}$　④ $x = \dfrac{-2+\sqrt{41}}{5}$
⑤ $x = \dfrac{3+\sqrt{37}}{4}$

해설

$x^2 + y^2 = 33,\ 0 \le y < 1$
$0 \le y^2 = 33 - x^2 < 1,\quad \sqrt{32} < x \le \sqrt{33}$
따라서 x의 정수 부분은 5이고 $y = x - 5$
$x^2 + (x-5)^2 = 33$
$\therefore\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$
$\therefore\ x = \dfrac{5+\sqrt{41}}{2}$ $(\because x > 0)$

11. 고속도로의 통행료을 $x\%$ 인상하면 요금을 올리기 전보다 통행료 수입이 78% 줄어들고, 통행 차량의 수도 $8x\%$ 줄어든다고 한다. 통행료의 요금 인상률 x 를 구하여라. (단, 단위는 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

인상 전의 입장요금을 A 원, 통행차량 수를 B대 라 하면

인상 후의 통행료는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원, 통행차량 수는 $B\left(1-\frac{8x}{1000}\right)$ 대, 통행료 수입은 $A\times B\times\left(1-\frac{78}{100}\right)$ 원

$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\times B\left(1-\frac{8x}{1000}\right)$

$= A\times B\times\left(1-\frac{78}{100}\right)$ 이다.

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{8x}{100}\right)=\left(1-\frac{78}{100}\right)$

$2x^2+175x-1950=0$

$(2x+195)(x-10)=0$

$x>0$ 이므로 $x=10$

12. 다음 중에서 이차함수가 아닌 것을 모두 고르면?

① $3x^2+1=0$ ② $y=-x^2+5x+2$

③ $y=(x-1)(x+3)-x^2$ ④ $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

⑤ $y=\frac{2}{5}x^2-\frac{7}{8}$

해설

① $3x^2+1=0$ 은 이차방정식이다.

③ $y=(x-1)(x+3)-x^2=2x-3$ 이므로 일차함수이다.

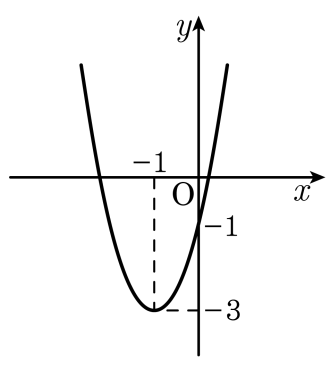
13. 이차함수 $y = (-x-4)^2 - 5$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 이차함수의 식이 $y = a(x+p)^2 + q$ 라고 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하면?

① 20　② -10　③ 0　④ 10　⑤ -20

해설

$y = (-x-4)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면
$-y = (-x-4)^2 - 5$,
$y = -(-x-4)^2 + 5 = -(x+4)^2 + 5$ 이므로
$a = -1, p = 4, q = 5$
$\therefore apq = -20$

14. 다음 그래프는 $y=2x^2$ 의 그래프를 평행이동한 것이다. 이 그래프의 함수식은?



① $y=2(x+1)^2-3$　② $y=2(x-1)^2-3$
③ $y=-2(x+1)^2-3$　④ $y=2(x+1)^2+3$
⑤ $y=2(x-1)^2+3$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -3)$ 이므로 $y=2(x+1)^2-3$ 이다.

15. 직선 $x = 1 - y$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = px^2$, $y = qx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 B, C, y 축과 만나는 점을 D 라 하고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CD}} = 3 : a : 1$ 의 비례식이 성립되기 위한 상수 p, q 에 대하여 pq 의 값을 구하여라.(단, $q > p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ 1)$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CD}} = 3 : a : 1$ 이고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 이므로

비례식 $1 : \frac{1}{2} = (3k + ak + k) : (k + ak)$ 이 성립한다.

$\therefore\ a = 2$

따라서 점 B 의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, C $\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$

$y = px^2$ 가 B $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 를 지나므로 $p = 2$

$y = qx^2$ 가 C $\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6}\right)$ 를 지나므로 $q = 30$

$\therefore\ pq = 60$

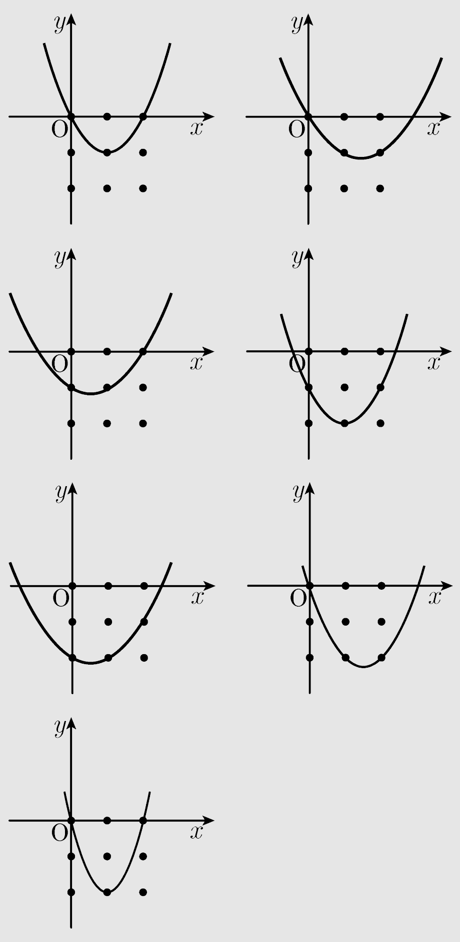
16. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \le y \le \frac{1}{2}$의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 3개를 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 14개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2이고
y 좌표가 될 수 있는 정수는 -2, -1, 0이다.
포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 7개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 7개의 포물선을 그릴 수 있다.
따라서 구하는 포물선의 개수는 14개이다.

17. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는 $x = 1$ 인 직선에 대해 대칭이고 x 절편은 3 이다. $a + b = -2$ 를 만족할 때, $2a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ 의 그래프가 $x = 1$ 인 직선에 대해 대칭이면

꼭짓점의 x 좌표가 1 이므로 $-\frac{b}{2a} = 1$,

$b = -2a \ \cdots$ ㉠

$a + b = -2 \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a = 2,\ b = -4$

또한 x 절편이 3 이므로 $9a + 3b + c = 0$

$\therefore\ c = -6$

따라서 $2a + b + c = 4 - 4 - 6 = -6$ 이다.

18. 이차함수 $y = x^2 + 3x - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 점 $(a,\ -2)$ 를 지난다. a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$y = x^2 + 3x - 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동시키면

$y = \left(x + \frac{3}{2} - 2\right)^2 - \frac{17}{4}$

$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$

$= x^2 - x - 4$

$(a,\ -2)$ 를 대입하면

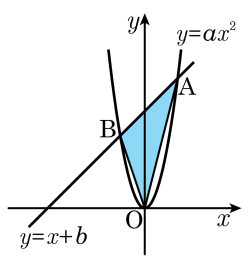
$a^2 - a - 4 = -2$

$a^2 - a - 2 = 0$

$(a - 2)(a + 1) = 0$

$\therefore a = 2$ 또는 $a = -1$

19. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프와 직선 $y = x+b$ 가 점 A (2, 8) 과 점 B 에서 만날 때, △ABO 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{21}{2}$

해설

$y = ax^2$ 에 점 $(2,\ 8)$ 을 대입, $8 = 4a,\ a = 2 \quad \therefore\ y = 2x^2$

$y = x + b$ 에 점 $(2,\ 8)$ 을 대입, $8 = 2 + b,\ b = 6 \quad \therefore\ y = x + 6$

$y = 2x^2$ 과 $y = x + 6$ 의 교점을 구하면

$2x^2 = x + 6$

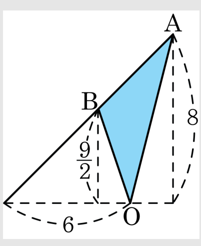
$2x^2 - x - 6 = 0$

$(2x + 3)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = 2$

$\therefore\ \mathrm{B}\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$

$y = x + 6$ 에서 $x = -6$ 일 때, $y = 0$ 이므로



△ABO 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$ 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 36 가 되는 모든 k 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4 = (x - 3k)^2 - 4$

$\therefore$ $\mathrm{A}(3k,\ -4),\ \mathrm{B}(0,\ 9k^2 - 4)$

$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 에서 $x = 3k - 2$ 또는 $3k + 2$

$\therefore$ $\mathrm{C}(3k - 2,\ 0),\ \mathrm{D}(3k + 2,\ 0)$

$k > 0$ 이므로 y 절편, 두 개의 x 절편 모두 0 보다 크다.

$$\begin{aligned} \therefore\ \square\mathrm{ABCD} &= \triangle\mathrm{CAD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times (3k + 2 - 3k + 2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (9k^2 - 4)(3k + 2 - 3k + 2) \\ &= 36 \end{aligned}$$

이 식을 정리하면 $8 + 2 \times (9k^2 - 4) = 36$

$k^2 = 2 \qquad \therefore\ k = \pm\sqrt{2}$

따라서 k 값의 곱은 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ 이다.

21. 함수 $f(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{px^2 + 2x - p + 3}}$ 가 최솟값을 가질 때, 정수 p 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

분모가 항상 음수이므로 주어진 함수가 최소가 될 때는 함수 $y = px^2 + 2x - p + 3 \cdots$ ㉠ 이 최댓값을 가질 때이다.
만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함숫값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.
따라서 $p > 0 \cdots$ ㉡
$D = p^2 - 3p + 1 < 0 \cdots$ ㉢ 의 두 식이 모두 만족되면, ㉠이 양의 최솟값을 갖는다.
$p^2 - 3p + 1 < 0$ 에서 $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < p < \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$
따라서 정수 p 의 최댓값은 2 이다.

22. $-1 \le \frac{p}{2} \le 0,\ p+2q \le 2$ 를 만족하는 실수 $p,\ q$ 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q\ (0 \le x \le 1)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{4}$

해설

$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$

이 때 $-1 \le \frac{p}{2} \le 0$ 에서 $0 \le -\frac{p}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\frac{p}{2}$ 일 때이다.

$\therefore\ m = q - \frac{p^2}{4}$

또한 $p + 2q \le 2$ 에서 $q \le -\frac{p}{2} + 1$

$\therefore\ m \le -\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2} + 1 = -\frac{1}{4}(p+1)^2 + \frac{5}{4}$

따라서 m 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

23. $0 \le \frac{p}{2} \le 1$, $2p - q \le 3$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = -x^2 + px + q$ $(0 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$

이때, $0 \le \frac{p}{2} \le 1$ 이고 $0 \le x \le 1$ 이므로

최댓값 M 은 $x = \frac{p}{2}$ 일 때이다.

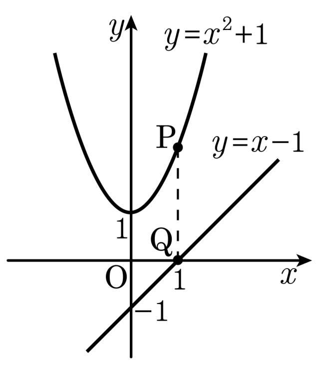
$\therefore\ M = q + \frac{p^2}{4}$

또한 $2p - q \le 3$ 에서 $q \ge 2p - 3$

$\therefore\ M \ge \frac{p^2}{4} + 2p - 3 = \frac{1}{4}(p + 4)^2 - 7$

따라서 M 의 최솟값은 -7 이다.

24. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{7}{4}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1)\\ &= t^2 - t + 2\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$