

1. p, q, r 에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$ 이 성립할 때, p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$$

양변에 2를 곱하면

$$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$$

$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$$

$$p-q = q-r = r-p = 0$$

$$\therefore p = q = r$$

따라서 p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

2. 두 방정식 $x^2 - 4x - 12 = 0$, $x^2 - 6x + p = 0$ 을 동시에 만족하는 해가 있을 때, $-p$ 의 값은? (단, $p \neq 0$)

① 4

② 16

③ -16

④ 8

⑤ -8

해설

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x - 6)(x + 2) = 0$$

$$x = -2, 6$$

1) $x = -2$ 가 $x^2 - 6x + p = 0$ 의 해일 때,

$$4 + 12 + p = 0 \therefore p = -16$$

2) $x = 6$ 이 $x^2 - 6x + p = 0$ 의 해일 때,

$$36 - 36 + p = 0 \therefore p = 0$$

따라서 $p \neq 0$ 이므로 $-p = -(-16) = 16$ 이다.

3. 두 이차방정식 $ax^2 - 3x + b = 0$, $bx^2 - 3x + a = 0$ 이 같은 근을 가질 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② 0

③ ± 1

④ ± 3

⑤ ± 5

해설

두 방정식의 같은 근(공통근)을 α 라 하면

$$a\alpha^2 - 3\alpha + b = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$b\alpha^2 - 3\alpha + a = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 를 하면 } (a - b)\alpha^2 - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(\alpha^2 - 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } \alpha^2 - 1 = 0 \therefore \alpha = \pm 1$$

$$\alpha = 1 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{ 또는 } \textcircled{2} \text{ 에 대입하면 } a + b = 3$$

$$\alpha = -1 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{ 또는 } \textcircled{2} \text{ 에 대입하면 } a + b = -3$$

$$\therefore a + b = \pm 3$$

4. 다음은 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$ ($a \neq 0$)을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2 - ac \geq 0$)

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \textcircled{1} = -\frac{c}{a} + \textcircled{1}$$

$$(x + \textcircled{2})^2 = \textcircled{3}$$

$$x = \textcircled{4} \pm \textcircled{5}$$

① $\frac{b^2}{a^2}$

④ $-\frac{b}{a}$

② $\frac{b}{a}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

③ $\frac{b^2 - ac}{a^2}$

해설

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

양변을 a 로 나누고 상수항을 이항하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

양변에 $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$$

$$x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

∴ ⑤가 잘못 되었다.

5. 무리수 x 의 소수 부분을 y 라 하자. 이 때, $x^2 + y^2 = 33$ 을 만족하는 무리수 x 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$x^2 + y^2 = 33 \text{에서 } y^2 = 33 - x^2$$

$$0 \leq y < 1 \text{이므로 } 0 \leq y^2 < 1 \text{에서}$$

$$0 \leq 33 - x^2 < 1$$

$$\therefore 32 < x^2 \leq 33$$

$$5^2 < 32 < x^2 \leq 33 < 6^2$$

따라서 x 의 정수 부분은 5이다.

$$\therefore x = 5 + y$$

$$x^2 + (x - 5)^2 = 33 \text{이므로 } x^2 - 5x - 4 = 0 \text{이다.}$$

$\therefore x$ 의 합은 근과 계수의 관계에 의해 5이다.

6. 두 실수 x, y 에 대하여 $x = a + 6\sqrt{3}$, $y = 1 + 2\sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 6xy + 9y^2 + x - 3y = 6$ 이 성립하는 a 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(x - 3y)^2 + (x - 3y) - 6 = 0$ 에서 $x - 3y = X$ 로 치환 하면

$$X^2 + X - 6 = 0$$

$$(X + 3)(X - 2) = 0$$

$$(x - 3y + 3)(x - 3y - 2) = 0$$

$x = a + 6\sqrt{3}$, $y = 1 + 2\sqrt{3}$ 을 대입하면

$$(a - 3 + 3)(a - 3 - 2), a(a - 5) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 5$$

$$\therefore 0 + 5 = 5$$

7. 1 부터 6 까지의 정수가 적힌 정육면체와 -1 부터 -6 까지의 정수가 적힌 정육면체를 굴려서 나온 눈의 수를 각각 a, b 라 할 때, 이차방정식 $ax^2 + 4bx + a = 0$ 이 실근을 갖지 않을 확률을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{6}$

해설

이차방정식 $ax^2 + 4bx + a = 0$ 이 실근을 갖지 않을 조건은

$$\frac{D}{4} < 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - a^2 < 0, 4b^2 < a^2$$

$$(2b - a)(2b + a) < 0$$

이 때 $a > 0$ 이고 $b < 0$ 이므로

$(2b - a) < 0$ 는 항상 성립하여 $(2b + a) > 0$ 이어야 한다.

따라서 $(a, b) = (3, -1), (4, -1), (5, -1), (6, -1),$

$(5, -2), (6, -2)$ 이므로

확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 이다.

8. 1 보다 큰 자연수 a, b 에 대하여 이차방정식 $ax^2 - a^2bx + 744 = 0$ 의 한 근이 2^a 이고 나머지 한 근은 두 자리의 소수일 때, a, b 를 두 근으로 가지고, 이차항의 계수가 1 인 x 에 관한 이차방정식의 계수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = ab$$

$$\alpha\beta = \frac{744}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{744}{a} = \frac{2^3 \times 3 \times 31}{a} \text{ 에서 두 근 중 한 근은 두 자리의 소수}$$

이므로 31 이고

나머지 한 근은 2^a 이므로

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore b = 13$$

따라서 구하고자 하는 이차방정식은 $x^2 - 16x + 39 = 0$ 이므로 계수의 합은 $1 - 16 + 39 = 24$ 이다.

10. 어떤 무리수 x 가 있다. x 의 소수 부분을 y 라 할 때 x 의 제곱과 y 의 제곱의 합이 33이다.
무리수 x 의 값은? (단, $x > 0$)

$$\textcircled{1} x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

$$\textcircled{2} x = \frac{2 + \sqrt{41}}{5}$$

$$\textcircled{3} x = \frac{5 + \sqrt{37}}{3}$$

$$\textcircled{4} x = \frac{-2 + \sqrt{41}}{5}$$

$$\textcircled{5} x = \frac{3 + \sqrt{37}}{4}$$

해설

$$x^2 + y^2 = 33, 0 \leq y < 1$$

$$0 \leq y^2 = 33 - x^2 < 1, \sqrt{32} < x \leq \sqrt{33}$$

따라서 x 의 정수 부분은 5이고 $y = x - 5$

$$x^2 + (x - 5)^2 = 33$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} (\because x > 0)$$

11. 고속도로의 통행료를 $x\%$ 인상하면 요금을 올리기 전보다 통행료 수입이 78% 줄어들고, 통행 차량의 수도 $8x\%$ 줄어든다고 한다. 통행료의 요금 인상률 x 를 구하여라. (단, 단위는 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

인상 전의 입장요금을 A 원, 통행차량 수를 B 대 라 하면
인상 후의 통행료는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, 통행차량 수는

$B\left(1 - \frac{8x}{1000}\right)$ 대, 통행료 수입은 $A \times B \times \left(1 - \frac{78}{100}\right)$ 원

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times B\left(1 - \frac{8x}{1000}\right)$$

$$= A \times B \times \left(1 - \frac{78}{100}\right) \text{이다.}$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \left(1 - \frac{8x}{1000}\right) = \left(1 - \frac{78}{100}\right)$$

$$2x^2 + 175x - 1950 = 0$$

$$(2x + 195)(x - 10) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 10$$

12. 다음 중에서 이차함수가 아닌 것을 모두 고르면?

① $3x^2 + 1 = 0$

② $y = -x^2 + 5x + 2$

③ $y = (x - 1)(x + 3) - x^2$

④ $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

⑤ $y = \frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{8}$

해설

① $3x^2 + 1 = 0$ 은 이차방정식이다.

③ $y = (x - 1)(x + 3) - x^2 = 2x - 3$ 이므로 일차함수이다.

13. 이차함수 $y = (-x - 4)^2 - 5$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 이차함수의 식이 $y = a(x + p)^2 + q$ 라고 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하면?

① 20

② -10

③ 0

④ 10

⑤ -20

해설

$y = (-x - 4)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

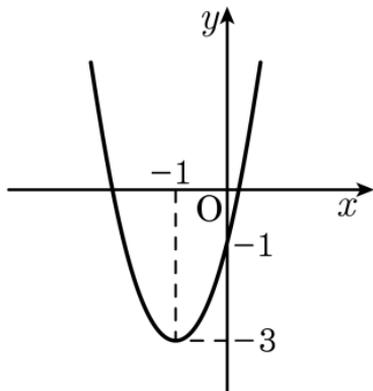
$$-y = (-x - 4)^2 - 5,$$

$y = -(-x - 4)^2 + 5 = -(x + 4)^2 + 5$ 이므로

$$a = -1, p = 4, q = 5$$

$$\therefore apq = -20$$

14. 다음 그래프는 $y = 2x^2$ 의 그래프를 평행이동한 것이다. 이 그래프의 함수식은?



① $y = 2(x + 1)^2 - 3$

② $y = 2(x - 1)^2 - 3$

③ $y = -2(x + 1)^2 - 3$

④ $y = 2(x + 1)^2 + 3$

⑤ $y = 2(x - 1)^2 + 3$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1, -3)$ 이므로 $y = 2(x + 1)^2 - 3$ 이다.

15. 직선 $x = 1 - y$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = px^2$, $y = qx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 B, C, y 축과 만나는 점을 D 라 하고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 3 : a : 1$ 의 비례식이 성립되기 위한 상수 p, q 에 대하여 pq 의 값을 구하여라.(단, $q > p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

A(1, 0), D(0, 1) 이고 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 3 : a : 1$ 이고 B 점의 x 좌표값이 $\frac{1}{2}$ 이므로

비례식 $1 : \frac{1}{2} = (3k + ak + k) : (k + ak)$ 이 성립한다.

$$\therefore a = 2$$

따라서 점 B 의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, C $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$

$y = px^2$ 가 B $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 를 지나므로 $p = 2$

$y = qx^2$ 가 C $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$ 를 지나므로 $q = 30$

$$\therefore pq = 60$$

16. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ 의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 3개를 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

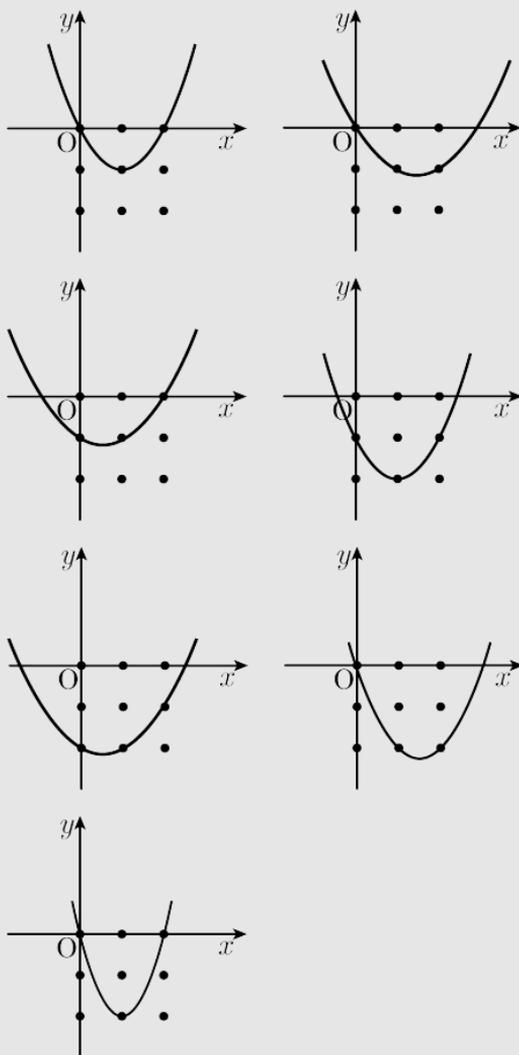
▶ 답: 개

▷ 정답: 14 개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2이고 y 좌표가 될 수 있는 정수는 -2, -1, 0이다.

포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 7개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 7개의 포물선을 그릴 수 있다.

따라서 구하는 포물선의 개수는 14 개이다.

17. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 의 그래프는 $x = 1$ 인 직선에 대해 대칭이고 x 절편은 3 이다. $a + b = -2$ 를 만족할 때, $2a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ 의 그래프가 $x = 1$

인 직선에 대해 대칭이면

꼭짓점의 x 좌표가 1 이므로 $-\frac{b}{2a} = 1$,

$$b = -2a \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a + b = -2 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여 $a = 2$, $b = -4$

또한 x 절편이 3 이므로 $9a + 3b + c = 0$

$$\therefore c = -6$$

따라서 $2a + b + c = 4 - 4 - 6 = -6$ 이다.

18. 이차함수 $y = x^2 + 3x - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 점 $(a, -2)$ 를 지난다. a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$y = x^2 + 3x - 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼

평행이동시키면

$$\begin{aligned}y &= \left(x + \frac{3}{2} - 2\right)^2 - \frac{17}{4} \\&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \\&= x^2 - x - 4\end{aligned}$$

$(a, -2)$ 를 대입하면

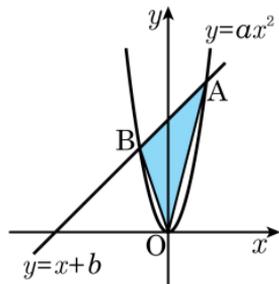
$$a^2 - a - 4 = -2$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

19. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프와 직선 $y = x + b$ 가 점 A (2, 8) 과 점 B 에서 만날 때, $\triangle ABO$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{21}{2}$

해설

$$y = ax^2 \text{ 에 점 } (2, 8) \text{ 을 대입, } 8 = 4a, a = 2 \therefore y = 2x^2$$

$$y = x + b \text{ 에 점 } (2, 8) \text{ 을 대입, } 8 = 2 + b, b = 6 \therefore y = x + 6$$

$y = 2x^2$ 과 $y = x + 6$ 의 교점을 구하면

$$2x^2 = x + 6$$

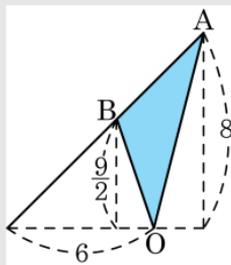
$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore B\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$y = x + 6$ 에서 $x = -6$ 일 때, $y = 0$ 이므로



$\triangle ABO$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$ 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 36 가 되는 모든 k 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4 = (x - 3k)^2 - 4$$

$$\therefore A(3k, -4), B(0, 9k^2 - 4)$$

$$y = x^2 - 6kx + 9k^2 - 4 \text{ 에서 } x = 3k - 2 \text{ 또는 } 3k + 2$$

$$\therefore C(3k - 2, 0), D(3k + 2, 0)$$

$k > 0$ 이므로 y 절편, 두 개의 x 절편 모두 0 보다 크다.

$$\therefore \square ABCD = \triangle CAD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (3k + 2 - 3k + 2)$$

$$+ \frac{1}{2} \times (9k^2 - 4)(3k + 2 - 3k + 2)$$

$$= 36$$

$$\text{이 식을 정리하면 } 8 + 2 \times (9k^2 - 4) = 36$$

$$k^2 = 2 \quad \therefore k = \pm \sqrt{2}$$

따라서 k 값의 곱은 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ 이다.

21. 함수 $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{px^2 + 2x - p + 3}}$ 가 최솟값을 가질 때, 정수 p 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

분모가 항상 음수이므로 주어진 함수가 최소가 될 때는 함수 $y = px^2 + 2x - p + 3 \cdots \textcircled{1}$ 이 최댓값을 가질 때이다.

만약 함수 y 가 음수나 0 을 최솟값으로 갖게 되면 함수값이 존재하지 않으므로 함수 y 의 최솟값은 양수이다.

따라서 $p > 0 \cdots \textcircled{2}$

$D = p^2 - 3p + 1 < 0 \cdots \textcircled{3}$ 의 두 식이 모두 만족되면, $\textcircled{1}$ 이 양의 최솟값을 갖는다.

$$p^2 - 3p + 1 < 0 \text{ 에서 } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < p < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

따라서 정수 p 의 최댓값은 2 이다.

22. $-1 \leq \frac{p}{2} \leq 0$, $p + 2q \leq 2$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q$ ($0 \leq x \leq 1$) 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{4}$

해설

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

이 때 $-1 \leq \frac{p}{2} \leq 0$ 에서 $0 \leq -\frac{p}{2} \leq 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\frac{p}{2}$ 일 때이다.

$$\therefore m = q - \frac{p^2}{4}$$

또한 $p + 2q \leq 2$ 에서 $q \leq -\frac{p}{2} + 1$

$$\therefore m \leq -\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2} + 1 = -\frac{1}{4}(p+1)^2 + \frac{5}{4}$$

따라서 m 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

23. $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$, $2p - q \leq 3$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = -x^2 + px + q$ ($0 \leq x \leq 1$) 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$$

이때, $0 \leq \frac{p}{2} \leq 1$ 이고 $0 \leq x \leq 1$ 이므로

최댓값 M 은 $x = \frac{p}{2}$ 일 때이다.

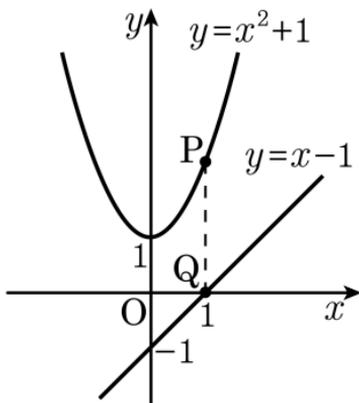
$$\therefore M = q + \frac{p^2}{4}$$

또한 $2p - q \leq 3$ 에서 $q \geq 2p - 3$

$$\therefore M \geq \frac{p^2}{4} + 2p - 3 = \frac{1}{4}(p + 4)^2 - 7$$

따라서 M 의 최솟값은 -7 이다.

24. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점 P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 \overline{PQ} 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{7}{4}$

해설

\overline{PQ} 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t, t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t, t - 1)$

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1) \\ &= t^2 - t + 2 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, \overline{PQ} 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$