

1. 실수 a 는 $0 < a < \frac{1}{2}$ 을 만족할 때, 다음 중 가장 큰 수를 구하시오.

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\frac{1}{1-a}$ ⑤ $\frac{a}{1+a}$

해설

주어진 a 값의 범위를 이용하여 보기식의 값의 범위를 알아낸다.

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{1} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0}, \quad 2 < \frac{1}{a}$$

$$\textcircled{4} \quad -\frac{1}{2} < -a < 0, \quad \frac{1}{2} < 1-a < 1$$

$$1 < \frac{1}{1-a} < 2$$

$$\textcircled{5} (\text{주어진 식}) = \frac{1+a-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a} \text{에서}$$

$$1 < 1+a < \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{1+a} < 1$$

$$0 < 1 - \frac{1}{1+a} < \frac{1}{3}$$

2. $ax^2 - 2ax + 3 < 0$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 0$

② $-1 < a < 3$

③ $0 \leq a \leq 3$

④ $-1 < a < 4$

⑤ $-1 \leq a \leq 4$

해설

(i) $a = 0$ 일 때, 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, 함수 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 에서 $D \leq 0$ 이므로
 $a^2 - 3a \leq 0$

$\therefore 0 < a \leq 3 (\because a \neq 0)$

3. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는 5이고 점 $C(a + b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $D(a - b)$ 의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$ 일때, $A(a), B(b)$ 사이의 거리는 $a - b$ 이므로, $a - b = 5$
따라서 $D(a - b)$ 의 좌표는 5

4. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$ 에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$

② $(2, 4)$

③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$

⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b) 라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$ 의 중점과 $\overline{BC}$ 의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a = 4, b = 2$$

5. $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(-1, -2)$, B $(2, 5)$, C $(7, 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

① $G\left(\frac{4}{3}, 1\right)$

② $G\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$

③ $G\left(2, \frac{8}{3}\right)$

④ $G\left(\frac{8}{3}, 1\right)$

⑤ $G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, 4\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)$$

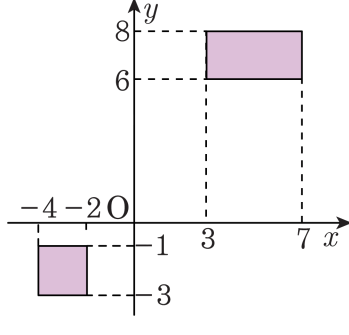
구하고자 하는 무게중심의 좌표를 G (x, y) 라 하면

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}, y = \frac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}, y = 2$$

$$\therefore G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

6. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



- ① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
 점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
 l 의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
 M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
 정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7 - (-2)}{5 - (-3)} = \frac{9}{8}$$

7. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

- ☐ ㉠ $a + bm = 0$
- ☐ ㉡ $p + qm = 0$
- ☐ ㉢ $ap + bq = 0$

- ☒ ㉠ ☐ ㉡
- ☐ ㉡ ☐ ㉢
- ☐ ㉢ ☐ ㉡, ㉢
- ☐ ㉣ ☐ ㉠, ㉢
- ☐ ㉤ ☐ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots \textcircled{1}$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{2}$

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots \textcircled{3}$

I) $\textcircled{1} // \textcircled{2} : m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

II) $\textcircled{1} \perp \textcircled{3} : m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$

$\therefore mp - q = 0$

8. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

9. 원 $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같고, 점 $(1, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 - 2y = 0$

② $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 2x + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$

해설

$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ 과 중심이 같은 원의 방정식은

$x^2 + y^2 - 2y + k = 0$ 의 꼴이다.

또, 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 + 1 - 2 + k = 0 \quad \therefore k = 0$$

따라서, 구하는 방정식은 $x^2 + y^2 - 2y = 0$

10. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.

그 점의 좌표가 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$$(x^2+y^2+2x+3y-1)m+(x^2+y^2+2x+2y-3)=0$$

- ① -1
- ② -2
- ③ -3
- ④ -4
- ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

$$x^2+y^2+2x+3y-1=0,$$

$$x^2+y^2+2x+2y-3=0$$

연립하여 풀면 $(x,y)=(-3,-2),(1,-2)$

그러므로 $(a,b)=(-3,-2)$

11. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0,0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

12. 다음 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $y = x + 5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

13. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

14. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ ()이다. ()안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2, \quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore y = x \pm 2\sqrt{2}$$

15. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한

점 Q 는 Q (2, -1)

또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여

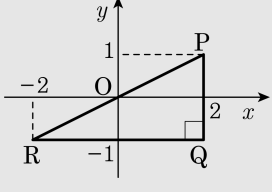
대칭이동한 점 R 는 R (-2, -1)

따라서, 다음 그림에서 세 점

P (2, 1), Q (2, -1), R (-2, -1) 을

꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



16. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 이차함수 $y = 2x^2 - 2mx + 1$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $-3 < m < 3$

② $-3 < m < 1$

③ $-1 < m < 3$

④ $m < -1$ 또는 $m > 1$

⑤ $m < -1$ 또는 $m > 3$

해설

$$x^2 - 2x - 3 < 2x^2 - 2mx + 1 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2(m-1)x + 4 > 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립해야 하므로 이차

방정식 $x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m-1)^2 - 4 < 0 \text{ 에서}$$

$$(m+1)(m-3) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 3$$

17. x 에 대한 이차부등식 $a(2x^2 + 1) \leq (x - 1)^2$ 의 해가 없도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < \frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$

⑤ $a < \frac{1}{2}$ 또는 $a > \frac{3}{2}$

② $a > \frac{3}{2}$

④ $a \geq \frac{3}{2}$

해설

$$a(2x^2 + 1) \leq (x - 1)^2 \text{에서}$$

$$2ax^2 + a \leq x^2 - 2x + 1,$$

$$(2a - 1)x^2 + 2x + a - 1 \leq 0 \text{이므로}$$

$$2a - 1 > 0 \text{일 때}$$

$$\text{즉 } a > \frac{1}{2} \text{일 때}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - (2a - 1)(a - 1)$$

$$= 1 - (2a^2 - 3a + 1) = -2a^2 + 3a < 0 \text{이어야}$$

모든 x 에 대하여 성립한다.

$$\text{즉 } a(2a - 3) > 0$$

$$a < 0 \text{ 또는 } a > \frac{3}{2} \text{인데}$$

$$a > \frac{1}{2} \text{이어야 하므로}$$

$$a > \frac{3}{2}$$

18. 두 점 $A(-2, -1)$, $B(4, 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB의 중점의 좌표는 $(1, 1)$

선분 AB의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB의 수직이등분선은 점 $(1, 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

19. 원 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ 를 원 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5$ 로 옮기는
평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로
 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

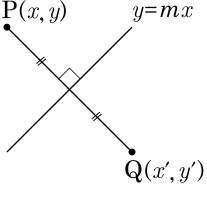
▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(2,3)$
 $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 5 \rightarrow$ 원의 중심 : $(-1,5)$
점 $(-1, 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $(x+3)+3(y-2)+2=0$
 $\therefore x+3y-1=0 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
 $a=3, b=-1 \therefore a+b=2$

20. 다음 은 직 선 $y = mx$ 에 대 한 점 $P(x, y)$ 의 대 칭 점 을 구 하 는 과 정 이 다. 빈 칸 에 들 어 갈 수 식 을 순 서 데 로 고 르 면?



대칭점을 $Q(x', y')$ 라 하면,
 PQ 의 중점이 직선
 $y = mx$ 위에 있으므로,
(가) $= m$ (나),
또한 직선
 PQ 와 직선 $y = mx$ 가 직교하므로
 $\frac{y' - y}{x' - x} =$ (다)
(가), (나), (다)에 의하여
 $x' = \frac{1}{1 + m^2} \{ (1 - m^2)x + 2my \}$
 $y' = \frac{1}{1 + m^2} \{ 2mx - (1 - m^2)y \}$

- ① (가): $y + y'$, (나): $x + x'$, (다): $-\frac{1}{m}$
② (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $-\frac{1}{m}$
③ (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $\frac{1}{m}$
④ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m}$
⑤ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m^2}$

해설

(가), (나) : $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$ 이므로
중점은 $\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right)$ 이다.
(다): 두 직선이 직교하면 기울기의 곱이 -1 이 다.
 $\Rightarrow m \times$ (다) $= -1$
 $\therefore$ (다) : $-\frac{1}{m}$

21. 직선 $y = mx + 5$ 가 두 점 $(2, 3)$, $(4, -1)$ 을 잇는 선분과 한 점에서 만날 때, 정수 m 의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

선분과 직선이 만나려면 직선 $mx - y + 5 = 0$ 에 대하여 두 점 $(2, 3)$, $(4, -1)$ 중 한 점은 직선의 윗부분에, 다른 한 점은 직선의 아랫부분에 존재해야 한다.

$$\text{즉, } (2m - 3 + 5)(4m - (-1) + 5) \leq 0$$

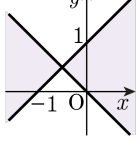
$$(m + 1)(2m + 3) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq m \leq -1$$

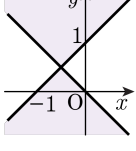
따라서 정수 m 은 -1 (1 개)

22. 부등식 $(x+y)(x-y+1) \geq 0$ 의 영역을 좌표평면 위에 어둡게 나타낸 것은? (단, 어두운 부분의 경계선은 포함한다.)

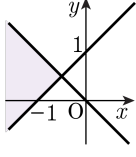
㉠



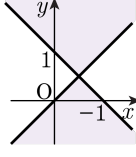
㉡



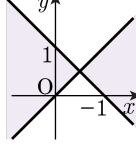
㉢



㉣

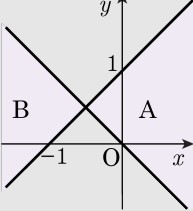


㉤



해설

구하는 부등식의 영역은 다음 두 연립부등식
 $x + y \geq 0$, $x - y + 1 \geq 0 \cdots \textcircled{㉠}$,
 $x + y \leq 0$, $x - y + 1 \leq 0 \cdots \textcircled{㉡}$
을 만족한다.
따라서 $\textcircled{㉠}$ 의 영역을 A ,
 $\textcircled{㉡}$ 의 영역을 B 라고 하면,
구하는 영역은 위의 그림의 색칠한 부분이다.
이 때, 경계는 영역에 포함된다.



23. 세 개의 부등식 $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq -2x + 1$, $y \geq 0$ 을 동시에 만족시키는 x, y 에 대하여 $x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

주어진 부등식을 동시에 만족시키는 영역은 다음 빛금 진 부분과 같다.

$x + 2y = k$ 라 놓으면

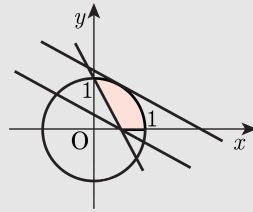
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ 이므로

점 $(\frac{1}{2}, 0)$ 을 지날 때 k 가 최소이고

직선 $x + 2y - k = 0$ 인,

원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접할 때 k 는 최대이다.

최솟값은 $k = \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}$



24. 부등식의 영역 $x^2 + y^2 - 8y + 12 \leq 0$ 위의 점 (x, y) 에 대하여 $x^2 - 6x + y^2 + 9$ 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 49

해설

$$x^2 + y^2 - 8y + 12 \leq 0 \Rightarrow x^2 + (y - 4)^2 \leq 4$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 9 = k \text{ 라고 하면}$$

그림처럼 ①일 때 k 가 최대

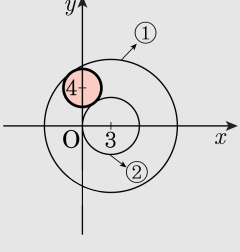
②일 때 k 가 최소가 된다.

중심사이의 거리가 5 이므로

$$\textcircled{1} : \sqrt{k} = 5 + 2 = 7$$

$$\textcircled{2} : \sqrt{k} = 5 - 2 = 3$$

$\therefore$ 최댓값 : 49 최솟값 : 9



25. 두 연립부등식 $-x + 1 \leq y \leq -x + 4$, $\frac{x-1}{2} \leq y \leq 2x + 1$ 을 동시에

만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y-1}{x+2}$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

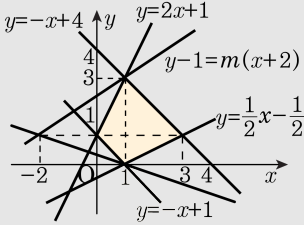
- ① $-\frac{1}{4}$
- ② $-\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ 1

해설

네 부등식 $y \geq -x + 1$, $y \leq -x + 4$,

$y \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y \leq 2x + 1$ 을 동시에

만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.



이때, $\frac{y-1}{x+2} = m$ 으로 놓으면

$y - 1 = m(x + 2)$ ㉠에서

㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점

$(-2, 1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선이다.

따라서, 직선 ㉠이 점 $(1, 3)$ 을 지날 때 m 은 최댓값을 갖고,

그 때의 m 의 값은

$$m = \frac{3 - 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

또 직선 ㉠이 점 $(1, 0)$ 을 지날 때 m 은 최솟값을 갖고, 그 때의 m 의 값은

$$m = \frac{0 - 1}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

그러므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$