1. 두 점 $A(4, -3), B(a, 3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $A(4, -3), B(a, 3)$ 에 대하여

$\overline{AB} = \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2}$

$= \sqrt{a^2 - 8a + 52}$

$= 6\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$a^2 - 8a - 20 = 0$

$(a-10)(a+2) = 0$

$\therefore a = 10 (\because a > 0)$

2. 두 점 $\mathrm{A}(-1,4), \mathrm{B}(6,3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$ 라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a,0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore\ \mathrm{P}=(2,0)$
$a+b=2$

3. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$를 이은 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표가 $(-13, 12)$일 때, $a,\ b$의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에서

선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점은

$$\left(\frac{2a-3\cdot(-1)}{2-3},\ \frac{2b-3\cdot 2}{2-3}\right)$$

$= (-2a-3, -2b+6) = (-13, 12)$이므로

$-2a-3 = -13,\ -2b+6 = 12$

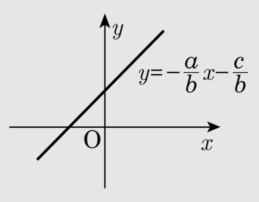
$\therefore\ a = 5,\ b = -3$

4. $ab < 0,\ ac > 0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$이 지나지 <u>않는</u> 사분면은?

① 제 1, 2 사분면 ② 제 1, 3 사분면 ③ 제 2, 4 사분면
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$ab < 0,\ ac > 0$이므로 $b \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 직선의 방정식을 b로 나누어 정리하면



$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

(기울기) $= -\frac{a}{b} > 0$

한편, $ab < 0,\ ac > 0$이므로
$ab \cdot ac = a^2bc < 0$
따라서 $bc < 0$
(y 절편) $= -\frac{c}{b} > 0$

따라서, 주어진 직선은 제 1, 2, 3 사분면을 지나고 제4 사분면은 지나지 않는다.

5. 두 직선 $2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$의 교점과 $(1,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은?

① $2x-y+3=0$ ② $x+y-6=0$
③ $4x-y+1=0$ ④ $x+2y-11=0$
⑤ $3x-2y+7=0$

해설

$2x+y+5=0$, $3x-2y+4=0$을
연립하여 교점을 구한다.
$\Rightarrow\ (-2,-1)$
$\therefore\ (-2,-1)$, $(1,5)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=\dfrac{5-(-1)}{1-(-2)}(x-1)+5=2x+3$
$\therefore\ 2x-y+3=0$

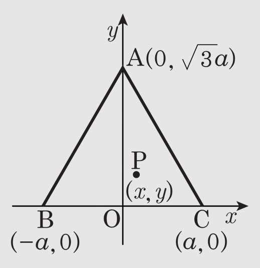
6. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분

④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$ 이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$$
$$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

7. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 3k^2 - 4k + 2 = 0$ 이 반지름의 길이가 1 인 원의 방정식일 때, 상수 k 값의 합을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 방정식을 변형하면

$(x-k)^2 + (y+k)^2 = -k^2 + 4k - 2 \quad \cdots ㉠$

반지름의 길이가 1 이므로

㉠에서 $-k^2 + 4k - 2 = 1 \leftarrow r^2 = 1$

$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$

$\therefore k = 1$ 또는 $k = 3$

따라서 합은 4 이다.

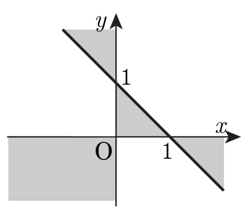
8. 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

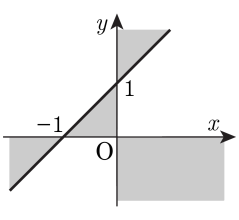
① 10　② 8　③ 6　④ 5　⑤ 4

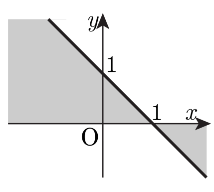
해설

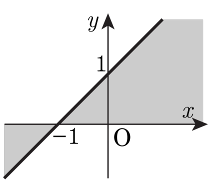
중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

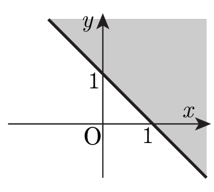
9. 좌표평면 위에 다음 부등식 $xy(x+y-1) \le 0$ 의 영역을 바르게 나타낸 것을 고르면? (단, 경계는 포함한다.)

①


②


③


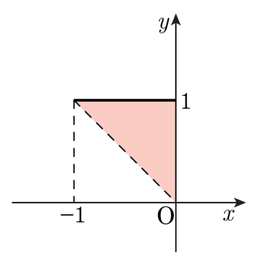
④


⑤


해설

$x=0,\ y=0,\ x+y-1=0$ 이 주어진 영역의 경계를 나타내고, 점$(-1,-1)$ 이 구하는 영역 $xy(x+y-1) \le 0$ 에 속하므로 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①번과 같다.

10. x, y 의 영역이 다음 그림과 같이 주어졌을 때, x^2+y^2 의 값의 최댓값은?



① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$

④ 2　　⑤ 3

해설

$x^2+y^2=k$ 라 하면,
k 값은 점 (0, 0) 을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 제곱한 것이므로
점 (−1, 1) 을 지날 때, k 값이 최대이다.
따라서 k 의 값의 최대값은 $(-1)^2+1^2=2$

11. 부등식 $2|x-3| \le x$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

(i) $x < 3$일 때

$2(-x+3) \le x,\ -3x \le -6 \quad \therefore x \ge 2$

그런데 $x < 3$이므로 $2 \le x < 3$

(ii) $x \ge 3$일 때

$2(x-3) \le x \quad \therefore x \le 6$

그런데 $x \ge 3$이므로 $3 \le x \le 6$

(i), (ii)에서 $2 \le x \le 6$

$\therefore$ 정수의 개수는 $6-2+1=5$(개)

12. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m \geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a \leq m \leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m \geq 0$이
항상 성립하려면 판별식 $D \leq 0$
$\frac{D}{4}=m^2+m \leq 0$
$m(m+1) \leq 0$, $-1 \leq m \leq 0$
$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

13. 이차부등식 $ax^2+bx+3<0$ 의 해가 $x<-1$ 또는 $x>3$ 일 때, $-x^2+bx+a\geq 0$ 의 해가 될 수 있는 것은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

해가 $x<-1$ 또는 $x>3$ 이므로 a 는 0 보다 작다
$ax^2+bx+3<0 \Leftrightarrow a(x+1)(x-3)>0$
$ax^2-2ax-3a>0$
$\therefore\ \ a=-1,\ \ b=2$
$-x^2+bx+a\geq 0$에 대입하면
$x^2-2x+1\leq 0$
$(x-1)^2\leq 0$
$\therefore\ \ x=1$

14. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 모두 고르면?

ㄱ 점 $(0, 5)$를 지나고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 $\rightarrow y = x + 5$
ㄴ 두 점 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$을 지나는 직선 $\rightarrow y = -2x + 1$
ㄷ x 절편이 2 , y절편이 -2인 직선 $\rightarrow y = 2x - 2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ (기울기)$= \tan 60° = \sqrt{3}$ 이고 y절편이 5이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$

ㄴ $y + 1 = \dfrac{3 - (-1)}{-1 - 1}(x - 1)$, $\therefore\ y = -2x + 1$

ㄷ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} = 1$, $\therefore\ y = x - 2$

따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㄴ뿐이다.

15. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 A$(-2k-1, 5)$ B$(k, -k-10)$, C$(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

16. 원점 O 에서 직선 $ax - y + 4 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라 한다. 선분 OH 의 길이가 2 가 될 때, a^2 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

선분 OH 는 원점과 직선 $ax - y + 4 = 0$ 간의 최단거리이므로,

$$\frac{|4|}{\sqrt{a^2+1}} = \overline{OH} = 2$$

$\sqrt{a^2+1} = 2$

$a^2 + 1 = 4$

$\therefore\ a^2 = 3$

17. 원 $x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p-q$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2+y^2+2ax-4ay+20a-25=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x+a)^2+(y-2a)^2=5a^2-20a+25$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-20a+25)=5\pi(a-2)^2+5\pi$
따라서 $a=2$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(-2, 4)$
$\therefore p=-2,\ q=4$
$\therefore p-q=-6$

18. 제1사분면에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원 C_1과 y축에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 다음 조건을 만족할 때, 원 C_1의 중심의 x좌표와 원 C_2의 중심의 y좌표의 합을 구하면?

(가) 두 원 C_1, C_2는 외접한다. (나) 두 원 C_1, C_2의 중심을 지나는 직선의 기울기는 -1이다.

① $1+\sqrt{2}$ ② $2+2\sqrt{2}$ ③ $3+3\sqrt{2}$
④ $4+4\sqrt{2}$ ⑤ $5+5\sqrt{2}$

해설

두 원 C_1, C_2의 방정식을 각각
$(x-a)^2+(y-2)^2=4\ (a>0)$
$(x-1)^2+(y-b)^2=1\ (b>0)$로 놓을 수 있다.
이 때, (가)에서 두 원이 외접하므로 두 원의 중심 $\mathrm{A}(a,2)$, $\mathrm{B}(1,b)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

따라서, $\sqrt{(1-a)^2+(b-2)^2}=3$

양변을 제곱하면 $(a-1)^2+(b-2)^2=9 \cdots\cdots$ ㉠
(나)에서 직선 AB의 기울기가 -1이므로
$\frac{b-2}{1-a}=-1$
$b-2=a-1$
$\therefore b=a+1 \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$(a-1)^2+(a-1)^2=9$
$2a^2-4a-7=0$
$\therefore a=1\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (a>0)

㉡에서 $b=a+1=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a+b=3+3\sqrt{2}$

19. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

20. 점 $(2,\ 3)$ 을 점$(1,\ 5)$ 로 옮기는 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가 직선 $y=3x-2$ 로 옮겨질 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -21

해설

평행이동 T 에 의하여 점 $(2, 3)$ 이 점$(1, 5)$ 로 옮겨지므로
$T:(x, y) \to (x+m, y+n)$ 이라고 하면,
$(2, 3) \xrightarrow{T} (1, 5)$ 에서
$2+m=1, 3+n=5$ $\quad \therefore m=-1, n=2$
$\therefore T:(x, y) \to (x-1, y+2)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 평행이동이다.
한편, 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가
옮겨지는 직선의 방정식은
$y-2=a(x+1)+b$
$\therefore y=ax+a+b+2 \cdots\cdots$ ㉠
이때, ㉠이 $y=3x-2$ 와 같아야 하므로
$a=3, a+b+2=-2$
$\therefore a=3, b=-7$ $\quad \therefore ab=-21$

21. 점 A$(1,\ 2)$를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{5}$

해설

점 A$(1,\ 2)$를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B$(a,\ b)$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$가

직선 $4x-2y-5=0$위에 있으므로

$4\cdot\dfrac{1+a}{2}-2\cdot\dfrac{2+b}{2}-5=0$

$\therefore\ 2a-b=5\ \cdots$ ㉠

또한, 직선 AB와 직선 $4x-2y-5=0$이

수직이므로 $\dfrac{b-2}{a-1}\times 2=-1$

$\therefore\ a+2b=5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

$\therefore$ B$(3,\ 1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

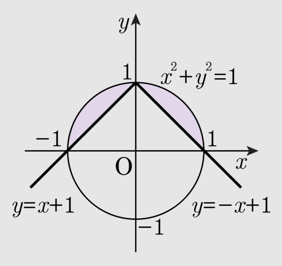
22. 좌표평면 위에서 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ |x| + y \ge 1 \end{cases}$$
이 나타내는 영역의 넓이는?

① $\dfrac{\pi - 1}{2}$ ② $\dfrac{\pi - 2}{2}$ ③ $\pi - 1$ ④ $\pi - 2$ ⑤ $\pi - 3$

해설

$x^2 + y^2 \le 1$은 $x^2 + y^2 = 1$의 내부,
$|x| + y \ge 1$은 $y \ge -|x| + 1$이므로
$y = -|x| + 1$의 윗부분이다.
$|x| + y \ge 1$에서
$x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad y \ge -x + 1$
$x < 0 \quad \Rightarrow \quad y \ge x + 1$이므로
연립부등식의 영역은 다음 그림과 같다. 따라서, 넓이는
$\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 = \dfrac{\pi}{2} - 1 = \dfrac{\pi - 2}{2}$이다.



23. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$　② $-2 \le x < 0$　③ $-1 \le x < 1$
④ $-1 \le x < 0$　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$
$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$
$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$
$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x-1<0$이므로
$-1 \le x < 1$

24. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10 % 를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x의 최댓값은?

① 60　② $\frac{200}{3}$　③ $\frac{230}{3}$　④ 80　⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당 판매 가격을 a, 판매량을 b라 하자.
올해 판매 가격을 $x\%$ 올리면
올해 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$,
판매량은 $b\left(1-\frac{x}{200}\right)$ 이므로
올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}$
작년 판매 금액이 ab이므로
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\times b\left(1-\frac{x}{200}\right)\times\frac{9}{10}\geq ab$
이 부등식을 정리하면
$9x^2-900x+20000\leq 0$
$(3x-100)(3x-200)\leq 0$
$\therefore \frac{100}{3}\leq x\leq\frac{200}{3}$

25. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1과 2사이에 있도록 k값의 범위를 구하면?

① $k < 0$, $k > 1$ ② $k \le 0$, $k \ge 2$ ③ $0 < k < 1$
④ $0 \le k \le 1$ ⑤ $0 < k < 2$

해설

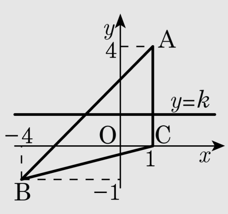
$x^2 - 2x + k = f(x)$ 라 하면
$f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$
$\therefore k > 0, k < 1$
$\therefore 0 < k < 1$

26. 좌표평면 위의 세 점 $A(1,4)$, $B(-4,-1)$, $C(1,0)$을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$의 넓이를 직선 $y=k$가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4-\sqrt{5}$　② $4-\sqrt{6}$　③ $4-\sqrt{7}$

④ $4-2\sqrt{2}$　⑤ $4-\sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y=\frac{-1-4}{-4-1}(x-1)+4$

$\Rightarrow\ \ y=x+3$

$\therefore\ \ y=k$와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3,\ k),\ (1,\ k)$

$\Rightarrow$ 이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2}\times(1-(k-3))\times(4-k)=5$

방정식을 풀면, $k=4\pm\sqrt{10}$

$\therefore\ k=4-\sqrt{10}\ (\because\ k<4)$

27. 점 A(0, 6) 과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이다. 이 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

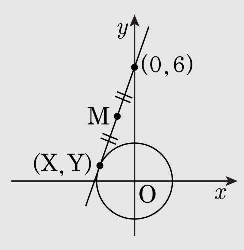
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원위의 점을 $(X,\ Y)$ 라 하면, $X^2 + Y^2 = 4$

중점 M 은

$$\mathrm{M}\left(\frac{X}{2},\ \frac{Y+6}{2}\right) = (x,\ y)$$



$X = 2x,\ Y = 2y - 6$ 대입하면

$(2x)^2 + (2y-6)^2 = 4$

$x^2 + (y-3)^2 = 1$

$a = 0,\ b = 3,\ r = 1$

28. 점 $(5,\ 3)$ 을 지나는 직선을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동 시킨 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰을 때, 이동된 직선이 점 $(-10, -5)$ 를 지난다고 한다. 이 때, 이동되기 전의 직선의 방정식은?

① $y = 2x + \frac{1}{2}$　② $y = \frac{1}{5}x + 2$　③ $y = \frac{1}{3}x - 2$

④ $y = 4x + 1$　⑤ $y = \frac{2}{5}x - 3$

해설

구하는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$y - 3 = m(x - 5)$

$y = mx - 5m + 3 \cdots$ ㉠

㉠을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동시키면

$y - 1 = mx - 5m + 3$

$\therefore y = mx - 5m + 4 \cdots$ ㉡

㉡를 다시 원점에 대하여 대칭이동시키면

$-y = -mx - 5m + 4$

$\therefore y = mx + 5m - 4 \cdots$ ㉢

㉢의 그래프가 점 $(-10,\ -5)$ 를 지나므로

$-5 = -10m + 5m - 4 \therefore m = \frac{1}{5}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{5}x + 2$

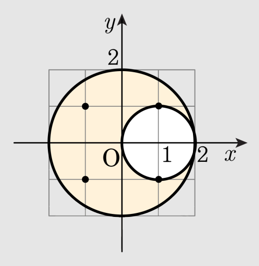
29. 부등식의 영역 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x^2+y^2 \ge 2x \end{cases}$ 를 만족시키는 점 (x, y) 중에서 x, y 둘 다 정수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 12개

해설

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ (x-1)^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$ 을 그려보면,



경계를 포함하므로 정수점을 구하면,
$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (-1, 0), (-2, 0), (0, -1)$
$(2, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1), (0, -2)$
총 12 개다.

30. 세 점 $A(1,\ 4)$, $B(-2,\ 3)$, $C(3,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $D(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

각의 이등분선의 정리에 의해, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\therefore\ \sqrt{10} : 2\sqrt{10} = \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$

$\therefore$ D 는 $\overline{BC}$를 $1 : 2$로 내분하는 점이다.

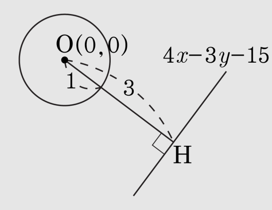
$$D = \left(\frac{1\times 3 + 2\times(-2)}{1+2}, \frac{1\times(-2) + 2\times 3}{1+2}\right) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

$\therefore\ a+b = 1$

31. 직선 $4x-3y-15=0$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 이르는 거리의 최대값을 m, 최소값을 n 이라 할 때, $m-n$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설



원의 중심 O(0, 0) 에서
직선 $4x-3y-15=0$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$$

따라서 직선에서 원에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\overline{\mathrm{OH}}+$(반지름의 길이)$=3+1=4$

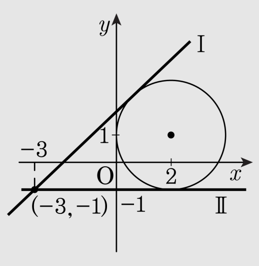
(최솟값)$=\overline{\mathrm{OH}}-$(반지름의 길이)$=3-1=2$

$\therefore\ m-n=4-2=2$

32. 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위에 있는 점 $P(x,\ y)$ 에 대하여 $\dfrac{y+1}{x+3}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최댓값 : $\dfrac{6}{5}$, 최솟값 : 0
② 최댓값 : $\dfrac{6}{5}$, 최솟값 : $\dfrac{1}{2}$
③ 최댓값 : $\dfrac{6}{7}$, 최솟값 : 0
④ 최댓값 : $\dfrac{22}{21}$, 최솟값 : 0
⑤ 최댓값 : $\dfrac{20}{21}$, 최솟값 : 0

해설



$x^2+y^2-4x-2y+1=0 \Rightarrow \ (x-2)^2+(y-1)^2=4$

$\dfrac{y+1}{x+3}=k$라 하면 $\Rightarrow \ y=k(x+3)-1$

즉, $(-3,\ -1)$ 을 지나는 직선이다.
다음 그림을 보면 k 는 I 일 때 최대이고, II 일 때 최소가 되는 것을 알 수 있다.
각각은 접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리가 원 반지름과 같다.

$\Rightarrow \ \dfrac{|2k+3k-1-1|}{\sqrt{k^2+1^2}}=2$

$\Rightarrow \dfrac{|5k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$

$\Rightarrow \ 21k^2-20k=0$

$k=0, \dfrac{20}{21}$

$\therefore$ 최댓값 : $\dfrac{20}{21}$, 최솟값 : 0