1. 좌표평면 위의 점 $A(3, -2)$, $B(4, 5)$, $C(-1, 3)$을 세 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$

$\therefore\ x = -2,\ y = -4$

따라서 점 D의 좌표는 $(-2, -4)$

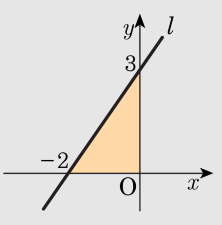
2. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

3. 원점에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때 a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 4　② 8　③ $3\sqrt{2}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

원점 (0, 0) 에서 직선 $ax+by+4=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a\times 0+b\times 0+4|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$4=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\rightarrow\ 2(a^2+b^2)=16$

$\therefore\ a^2+b^2=8$

4. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,
$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

5. 직선 $x-2y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은?

① $x+2y+4=0$　② $x+2y-4=0$　③ $x-2y-4=0$
④ $2x-y+4=0$　⑤ $x-2y=0$

해설
원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

6. $k(x^2-4x+1)<2x$가 모든 실수에 대해 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k<-\frac{1}{3}$　② $k<0$　③ $k>-1$

④ $-\frac{1}{3}<k<0$　⑤ $-1<k<-\frac{1}{3}$

해설

$kx^2-4kx+k-2x<0$

$\Rightarrow\ kx^2-2(2k+1)x+k<0$

모든 실수에 대해 성립하므로 $k<0, D<0$

$\frac{D}{4}=(2k+1)^2-k^2<0$

$3k^2+4k+1<0,\ (3k+1)(k+1)<0$

$\therefore -1<k<-\frac{1}{3}$

7. 다음은 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $m<x<n$ $(m<0,\ n<0)$ 일 때, 부등식 $cx^2+bx+a>0$의 해를 구하는 과정이다.

> $ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)>0$ 에서
> $m<x<n$ 의 해가 나오려면
> a 는 (가)이어야 한다.
> 또, $b=-a(m+n),\ c=amn$ 이므로
> $cx^2+bx+a>0$ 은 $amnx^2-a(m+n)x+a>0$
> 여기서 a는 (가)이므로
> $mnx^2-(m+n)x+1<0$
> mn 는 (나)이므로 위 식을 mn 로
> 나누어 정리하면$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$
> $\therefore$ (다) $<x<$ (라)

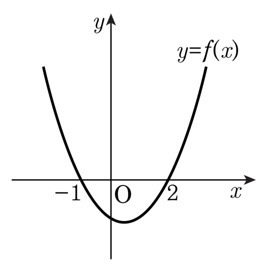
위 풀이 과정 중 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

① 양수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
② 음수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
③ 음수, 양수, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$
④ 양수, 음수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$
⑤ 음수, 양수, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$

해설

$a(x-m)(x-n)<0 \iff m<x<n$ 이므로
a 는 음수이어야 한다.
$m<0,\ n<0$ 이므로 $mn>0$
즉, 양수이고 $\frac{1}{m}>\frac{1}{n}$ 이므로
$\left(x-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)<0 \iff \frac{1}{n}<x<\frac{1}{m}$

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x-2005) \le 0$ 의 해는?



① $1999 \le x \le 2002$

② $2000 \le x \le 2003$

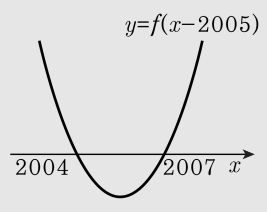
③ $2001 \le x \le 2004$

④ $2002 \le x \le 2004$

⑤ $2004 \le x \le 2007$

해설

함수 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는
$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
2005만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $y = f(x-2005)$ 의 그래프는
다음 그림과 같으므로 부등식
$y = f(x-2005) \le 0$ 의 해는
$2004 \le x \le 2007$



9. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하면?

① $m < -2,\ \ m > \frac{2}{3}$
② $m < -1,\ \ m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2,\ \ m > 2$
④ $m < 2,\ \ m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\ \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을
항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$
$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\ \ m < -2\ ,\ m > \frac{2}{3}$

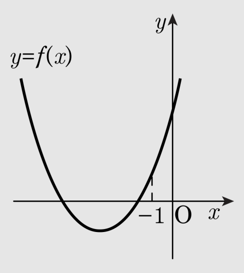
10. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____개

▷ 정답: 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

11. 다음 그림과 같이 두 점 A , B 가 수직선 상에 위치해 있다. 선분 AB 를 2 : 3으로 내분하는 점을 D , 선분 AB 를 2 : 3 으로 외분하는 점을 E , 선분 AB 를 3 : 2 로 내분하는 점을 F , 선분 AB 를 3 : 2 로 외분하는 점을 G 라 하자. 점 D, E, F, G를 수직선 위에서 왼쪽부터 순서대로 적으시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 점 E

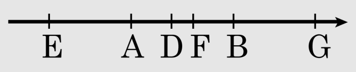
▷ 정답 : 점 D

▷ 정답 : 점 F

▷ 정답 : 점 G

해설

다음 그림에서 보듯이, 점의 순서는 E, D, F, G 이다.



12. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45°=1$

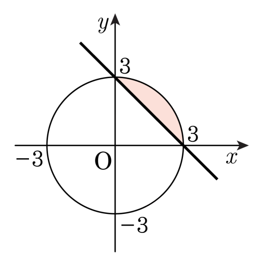
$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

13. 다음 그림의 어두운 부분을 연립부등식으로 바르게 나타낸 것은? (경계선 포함)



① $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ y \ge -x+3 \end{cases}$

② $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 9 \\ y \ge -x+3 \end{cases}$

③ $(x^2+y^2-9)(x+y-3) \le 0$

④ $(x^2+y^2-9)(x+y-3) \ge 0$

⑤ $(x^2+y^2-9)(x+y-3) < 0$

해설

원의 방정식 : $x^2+y^2=9$

직선의 방정식 : $y=-x+3$

⇒ 원의 내부, 직선의 위쪽을 나타내므로

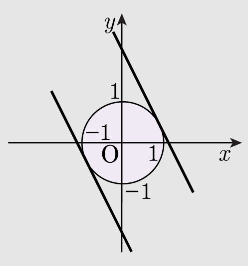
$\begin{cases} x^2+y^2 \le 9 \\ y \ge -x+3 \end{cases}$

14. 부등식 $x^2 + y^2 \le 1$ 을 만족시키는 두 실수 $x,\ y$ 에 대해 $2x + y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① $-2\sqrt{3}$　　② $2\sqrt{3}$　　③ 0

④ $-2\sqrt{5}$　　⑤ $2\sqrt{5}$

해설



$2x + y = k$ 라 하고 직선을 움직여 보면
직선 $2x + y = k$ 가
원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접할 때,
k 는 최댓값을 갖는다.
$(-2x + k)^2 + x^2 = 1$ 에서
$4x^2 - 4kx + k^2 + x^2 = 1$
방정식 $5x^2 - 4kx + k^2 - 1 = 0$ 의 판별식을
D 라 하면 $\dfrac{D}{4} = (-2k)^2 - 5(k^2 - 1) = 0$
$k^2 = 5$　　$\therefore k = \pm\sqrt{5}$
따라서 최댓값은 M 은 $\sqrt{5}$,
최솟값은 m 은 $-\sqrt{5}$ 이므로
$M - m = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

15. A(1, 5), B(7, −1), P(x, y) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{BP}}$ 임을 만족하는 자취 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 1$
② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
③ $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 10$
④ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 12$
⑤ $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

해설

$\overline{\mathrm{AP}}$ 의 기울기 : $\dfrac{y-5}{x-1}$

$\overline{\mathrm{BP}}$ 의 기울기 : $\dfrac{y+1}{x-7}$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 −1 이다.

$\Rightarrow \dfrac{y-5}{x-1} \times \dfrac{y+1}{x-7} = -1$

$\Rightarrow y^2 - 4y - 5 = -x^2 + 8x - 7$

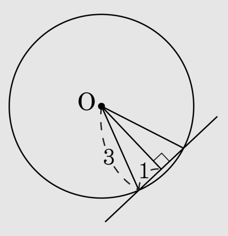
$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

16. 직선 $y = x + m$ 이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 2 일 때, m^2 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설



위 그림을 보면 원과 직선사이 거리가

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

이제 공식을 사용하면,

$$\frac{|m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \quad m = \pm 4$

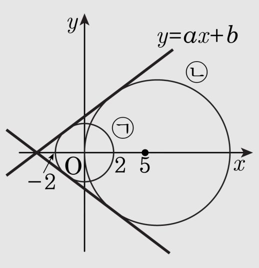
$\therefore \quad m^2 = 16$

17. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4$, $(x-5)^2 + y^2 = 25$

① $y = \pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)
② $y = \pm\frac{4}{5}x\pm2$ (복부호 동순)
③ $y = \pm\frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
④ $y = \pm\frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
⑤ $y = \pm\frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설



$x^2 + y^2 = 4 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-5)^2 + y^2 = 25 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을 $y = ax + b$ $\cdots\cdots$ ㉢로 놓으면
원 ㉠과 직선㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡도 직선 ㉢, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$$\frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$$

$\therefore |5a+b| = 5\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|5a+b|}{|b|} = \frac{5}{2}$$

$2|5a+b| = 5|b|, 2(5a+b) = \pm5b$

$\therefore b = -\frac{10}{7}a$ 또는 $b = \frac{10}{3}a$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2+1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면
$24a^2 + 49 = 0$
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, ㉣에서

$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2+1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$\therefore a = \pm\frac{3}{4}, b = \pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm\frac{3}{4}x\pm\frac{5}{2}$ (복부호 동순)

18. 포물선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y=x-1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

① $-\frac{7}{4}$　② $-\frac{5}{4}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ 0

해설

$y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y=x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y-a)=x^2, \quad y=-x^2+a$
이 곡선이 $y=x-1$ 에 접하려면
$x-1=-x^2+a$, $x^2+x-a-1=0$ 에서
$D=1^2-4(-a-1)=0$
$\therefore \ a=-\frac{5}{4}$

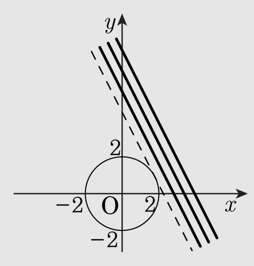
19. $x^2 + y^2 \leq 4,\ 2x + y > k$에 대하여 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하지 않도록 하는 k 의 최솟값은?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

해설

$x^2 + y^2 \leq 4$는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가2 인 원과 그 내부이며, $2x + y > k$는 직선$y = -2x + k$ 의 윗부분이다.

그러므로 두 식을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 존재하지 않도록 하기 위해서는 아래 그림에서 직선이 원의 위쪽에 존재해야 함을 알 수 있다.



원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 직선 $y = -2x + k$ 가 접할 때는 두 식을 연립하여 y 를 소거하면,

$$5x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0,\ \frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 4) = 0$$

$\therefore\ k = \pm 2\sqrt{5}$

따라서 $k \geq 2\sqrt{5}$

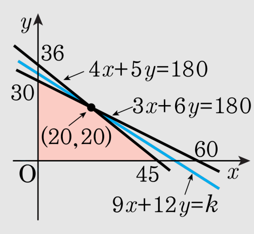
20. 어떤 공장에서 제품 A, B 를 각각 $1kg$ 씩 만드는 데 필요한 전력과 가스 및 제품 1 kg 에서 얻어지는이익이 아래 표와 같다. 하루 동안 이 공장에서 사용할 수 있는 전력은 180kWh, 가스는 $180\,m^3$ 일때, 하루 동안 제품 A, B 를 생산하여 얻을 수 있는 최대 이익은?

제품	전력(kWh)	가스(m^3)	이익(만원)
A	4	3	9
B	5	6	12

① 240 만원　② 300 만원　③ 360 만원
④ 380 만원　⑤ 420 만원

해설

하루에 제품 A 를 $x$kg, 제품 B 를 $y$kg 을 생산한다고 하면
$x \geq 0,\ y \geq 0 \cdots$ ㉠
또, 하루 동안 사용할 수 있는 전체 전력과 가스의 한도는 각각 180kWh, $180\,m^3$ 이므로
$4x + 5y \leq 180 \cdots$ ㉡
$3x + 6y \leq 180 \cdots$ ㉢
이 때, ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 어두운 부분(경계선 포함)과 같다.



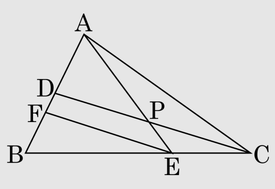
하루 동안 얻을 수 있는 이익을
$9x+12y = k$ (k 는 상수)$\cdots$ ㉣ 로 놓으면
직선 ㉣이 교점 (20, 20) 을 지날 때,
k 의 값이 최대가 된다.
따라서 하루 동안에 제품 A 를 20 kg,
제품 B 를 20 kg 씩 만들면
최대 이익은 $9 \times 20 + 12 \times 20 = 420$ (만원)

21. △ABC 에서 변 AB 의 중점을 D , 변 BC 를2 : 1 으로 내분하는 점을 E , $\overline{AE}$ 와 $\overline{CD}$ 의 교점을 P 라 할 때 $\overline{AP} : \overline{PE}$ 는?

① 1 : 1　② 3 : 2　③ 2 : 1　④ 5 : 2　⑤ 3 : 1

해설

점 E 를 지나고 $\overline{CD}$ 에 평행한 직선을 긋는다.
이 직선이 선분 $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 F 라 하면,
$\overline{BF} : \overline{FD} = \overline{BE} : \overline{EC}$ 이므로
$\overline{BF} : \overline{FD} = 2 : 1$ 이다.

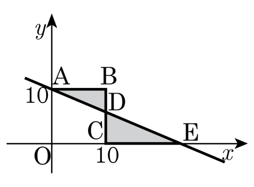


$\therefore \overline{FD} = \frac{1}{3}\overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD} : \overline{DF} = 3 : 1$

$\therefore \overline{AP} : \overline{PE} = \overline{AD} : \overline{DF} = 3 : 1$

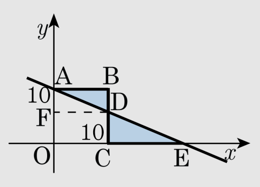
22. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC가 있다. 변 BC 위에 점 B, C가 아닌 한 점 D를 지나는 직선 AD를 그을 때, 색칠한 부분의 넓이가 사다리꼴 OADC의 넓이와 같아졌다면 직선 AD의 기울기는?



① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

y축 위에 $\overline{OC}//\overline{FD}$가 되게 F를 잡으면, 다음 그림에서



$\triangle$ ABD $=$ $\triangle$ AFD이므로

$\square$ OCDF $=$ $\triangle$ DCE

$\overline{OC}\times\overline{CD} = \frac{1}{2}\ \overline{CE}\times\overline{CD}$

$\therefore\ \overline{CE} = 2\overline{OC} = 2\times 10 = 20$

$\therefore\ \overline{OE} = 30$

따라서 직선 AD의 기울기는 $\frac{0-10}{30-0} = -\frac{1}{3}$