1. 이차방정식 $(x-5)^2 = a$ 의 한 근이 $x = 5 - \sqrt{3}$ 일 때, 다른 한 근은? (단, $a \geq 0$)

① 5　② $3 + \sqrt{5}$　③ $3 - \sqrt{5}$

④ $5 + \sqrt{3}$　⑤ 3

해설

$x - 5 = \pm\sqrt{a}$

$\therefore x = 5 \pm \sqrt{a}$

$a = 3$ 이므로 다른 한 근은 $5 + \sqrt{3}$ 이다.

2. 다음 중 원점을 꼭짓점, y 축을 축으로 하고 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나는 포물선의 방정식은?

① $y=(x-1)^2+3$　② $y=(x+1)^2+3$

③ $y=x^2+2$　④ $y=x^2+3$

⑤ $y=3x^2$

해설

원점을 꼭짓점으로 하고 y 축을 축으로 하는 포물선의 식은 $y=ax^2$ 이고, 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나므로

$3=a\times(-1)^2$, $a=3$

$\therefore y=3x^2$

3. x에 관한 이차방정식 $ax^2 - px - ap - 3q = 0$이 a의 값에 관계없이 항상 $x = 3$의 근을 가질 때, $p + q$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = 3$이 근이므로 $9a - 3p - ap - 3q = 0$이고
a의 값에 관계없이 성립하므로
$(9 - p)a - 3(p + q) = 0$에 의하여
$p = 9,\ q = -9$이다.
$\therefore p + q = 0$

4. 이차방정식 $x^2 + ax - a - 5 = 0$ 의 두 근이 $x = 2,\ x = b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(x-2)(x-b) = 0$
$x^2 - (2+b)x + 2b = 0$
$\therefore 2 + b = -a,\ 2b = -a - 5$
$b = -3,\ a = 1$
$\therefore a + b = -2$

5. 이차방정식 $3x^2-6x-2=0$ 을 $(x-a)^2=b$ 의 꼴로 나타낼 때, $2a+3b$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$3x^2-6x-2=0$

$3x^2-6x=2$

$x^2-2x=\frac{2}{3}$

$x^2-2x+1=\frac{5}{3}$

$(x-1)^2=\frac{5}{3}$

$a=1,\ b=\frac{5}{3}$

$\therefore 2a+3b=2\times1+3\times\frac{5}{3}=2+5=7$

6. 이차함수 $y = x^2 + 3x + a$ 의 그래프가 두 점 $(1,\ 3)$, $(-1,\ b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

점 $(1,\ 3)$ 을 지나므로 $x = 1$, $y = 3$ 을 대입하면
$3 = 1^2 + 3 \times 1 + a,\ \ a = -1 \ \ \therefore\ y = x^2 + 3x - 1$
점 $(-1,\ b)$ 를 지나므로 $x = -1,\ y = b$ 를 대입하면
$b = (-1)^2 + 3 \times (-1) - 1 = -3 \ \ \therefore b = -3$
따라서 $a = -1,\ b = -3$ 이므로 $ab = (-1) \times (-3) = 3$ 이다.

7. 다음 포물선을 폭이 좁은 것부터 차례로 기호로 나열한 것은?

(가) $y=-x^2$	(나) $y=-5x^2$
(다) $y=-\frac{1}{2}x^2$	(라) $y=-\frac{5}{4}x^2$

① (가)-(나)-(다)-(라) ② (나)-(라)-(가)-(다) ③ (다)-(나)-(가)-(라)
④ (나)-(가)-(라)-(다) ⑤ (라)-(나)-(다)-(가)

해설

$y=ax$ 에서 a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

8. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 0)$ 이다.

② 대칭축은 x 축이다.

③ 이차함수 $y = -x^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다.

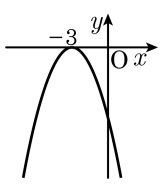
④ $x < 0$ 일 때, x의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

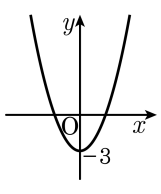
⑤ y의 값의 범위는 $y \geq 0$ 이다.

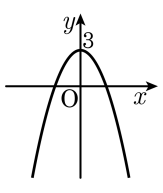
해설

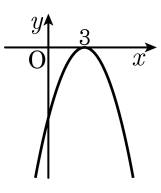
② 대칭축은 y 축$(x = 0)$이다. ④ $x < 0$ 일 때, x의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

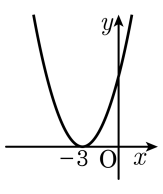
9. 다음 중 $y=-\frac{2}{3}(x-3)^2$ 의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

x^2 의 계수 $-\frac{2}{3}$ 는 음수이므로 위로 볼록, 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 0)$ 이다.

10. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하는 x 의 값의 범위는?

① $x > -4$ ② $x < -4$ ③ $x < 4$

④ $x > 4$ ⑤ $x > -5$

해설

$y = -x^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 4 만큼 평행이동하면 $y = -(x-4)^2$
꼭짓점이 $(4,\ 0)$ 이고 위로 볼록한 그래프이므로
$x < 4$ 인 범위에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

11. 이차함수 $y = 2x^2 - 12x + 13$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표와 축의 방정식을 구하면?

① 꼭짓점 $(3, -5)$, 축 $x = -5$ ② 꼭짓점 $(3, -5)$, 축 $x = 3$

③ 꼭짓점 $(3, 13)$, 축 $x = 3$ ④ 꼭짓점 $(3, 13)$, 축 $x = 13$

⑤ 꼭짓점 $(3, -13)$, 축 $x = 3$

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 12x + 13 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 13 \\ &= 2(x-3)^2 - 5 \end{aligned}$$

12. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가하는 x 값의 범위를 구하면?

① $x > 1$ ② $x > 2$ ③ $x > 3$ ④ $x < 2$ ⑤ $x < 1$

해설

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x) + 1$$
$$= \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{9}{2} + 1$$
$$= \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{7}{2}$$

축이 $x = 3$ 이므로 x 의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 범위는 $x > 3$이다.

13. 이차함수 $y = -x^2 + 6x - 8$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 직선 $x = -3$ 을 축으로 한다.

② 모든 x의 값에 대하여 y의 값의 범위는 $y \geq 1$ 이다.

③ 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 1)$ 이다.

④ $x > 3$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

⑤ $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

해설

$y = -(x-3)^2 + 1$
① 축의 방정식 $x = 3$
② $y \leq 1$
③ 꼭짓점 $(3,\ 1)$
⑤ x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동

14. 다음 중 $\left(\frac{7}{3}x-14\right)(2y+8)=0$을 만족하는 것의 개수는?

㉠ $x=6,\ y=-4$	㉡ $x=6,\ y=4$
㉢ $x=-6,\ y=-4$	㉣ $x=-6,\ y=4$
㉤ $x=4,\ y=6$	㉥ $x=-4,\ y=6$

① 한 개도 없다. ② 2 개 ③ 3 개
④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\frac{7}{3}x-14=0$ 또는 $2y+8=0$ 이므로
$x=6$ 또는 $y=-4$ 인 것을 찾으면
$x=6$ 인 것은 ㉠, ㉡
$y=-4$ 인 것은 ㉠, ㉢
따라서 만족하는 것의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢이므로
3 개이다.

15. 세 이차방정식 $x^2+8x+12=0$ 과 $2x^2+9x-18=0$, $2x^2+4mx-12m=0$ 이 공통근을 가질 때, m 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x^2+8x+12=0 \rightarrow (x+6)(x+2)=0$

$\therefore x=-6,\ -2$

$2x^2+9x-18=0 \rightarrow (x+6)(2x-3)=0$

$\therefore x=-6,\ \frac{3}{2}$

이므로 두 방정식의 공통근은 $x=-6$ 이다.

따라서 이차방정식 $2x^2+4mx-12m=0$ 도 근으로 -6 을 가지므로 $x=-6$ 을 대입하면

$2\times(-6)^2+4\times(-6)m-12m=0$

$36m=72$

$\therefore m=2$

16. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $k = -6$ 이면 근이 2 개이다.

② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.

③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.

④ $k = 2$ 이면 근이 1 개이다.

⑤ $k = 4$ 이면 근이 없다.

해설

$(x-1)^2 = 3-k,\ x-1 = \pm\sqrt{3-k}$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3-k}$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0 개

$k = 3$: 근이 1 개

$3 < k$: 근이 2 개

17. 서로 다른 수 $x,\ y$ 에 대하여 $2x^2 - 4xy + 2y^2 = 6x - 6y$ 가 성립할 때, $x - y$ 의 값을 구하여라. (단, $x \neq y,\ xy \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 6x - 6y$
$x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y = 0$
$(x-y)^2 - 3(x-y) = 0$
$(x-y)(x-y-3) = 0$
$x \neq y$ 이므로 $x - y - 3 = 0,\ x - y = 3$ 이다.

18. 이차방정식 $x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가질 때, a 의 값이 최대가 되도록 b 의 값을 정하려고 한다. 이 때, a 의 값은? (단, a , b 는 두 자리의 자연수)

① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

$x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가지려면
$D = 0,\ \ a^2 - 4 \times 9b = 0$
$\therefore a^2 = 36b = 6^2 b$
따라서 b 는 제곱수이어야 하고, b 가 최대일 때 a 가 최대가 된다.
두 자리의 자연수 중 가장 큰 제곱수는 81 이므로 $b = 81$ 이다.
$\therefore\ a^2 = 6^2 \times 81 = (6 \times 9)^2 = 54^2$
$\therefore\ a = 54\ (\because\ a$는 자연수)

19. 이차방정식 $ax^2+bx+5=0$ 의 한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ 일 때, 유리수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

한 근이 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$ 이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}+2$

근과 계수와의 관계에서

$-\dfrac{b}{a}=(\sqrt{5}+2)+(-\sqrt{5}+2)=4$, $\dfrac{5}{a}=(\sqrt{5}+2)(-\sqrt{5}+2)=-1$

$\therefore a=-5$

$\therefore b=-4a=(-4)\times(-5)=20$

$\therefore a+b=-5+20=15$

20. 다음 이차방정식이 중근을 가질 때 k, $k+5$ 를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은? (단, $k < 0$)

$2x^2 + kx + 8 = 0$

① $x^2 - 11x + 24 = 0$ ② $x^2 + 11x + 24 = 0$

③ $x^2 - 11x - 24 = 0$ ④ $x^2 + 11x - 24 = 0$

⑤ $x^2 + 5x - 12 = 0$

해설

$k^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$, $k = \pm 8$

$k < 0$ 이므로 $k = -8$

-8, -3 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1 인 이차방정식은

$x^2 + 11x + 24 = 0$

21. 이차방정식 $x^2+3x-2=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+1$, $\beta+1$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 2 인 이차방정식은?

① $2x^2-2x+8=0$ ② $2x^2-8x+4=0$

③ $2x^2+4x-8=0$ ④ $2x^2-x-4=0$

⑤ $2x^2+2x-8=0$

해설

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-2$
구하는 이차방정식에서
두 근의 합은 $(\alpha+1)+(\beta+1)=-1$
두 근의 곱은 $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=-4$
$\therefore\ x^2+x-4=0$
이차항의 계수가 2 이므로 $2x^2+2x-8=0$

22. $x > y > 0$ 이고, $(x-y)^2 = xy$ 일 때, $\dfrac{x}{y}$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$ ② $1+\sqrt{5}$ ③ $3+\sqrt{5}$

④ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

해설

$(x-y)^2 = xy$

$x^2 - 2xy + y^2 = xy$

$x^2 - 3xy + y^2 = 0$ 의 양변을 y^2 으로 나누면

$\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{3x}{y} + 1 = 0$ 에서 $\dfrac{x}{y}$ 을 t 로 치환하면

$t^2 - 3t + 1 = 0$

$\therefore t = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \left(= \dfrac{x}{y}\right)$

$x > y > 0$ 이므로 $\dfrac{x}{y} > 1$

$\therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

23. 어떤 무리수 a가 있다. a의 소수 부분을 b라 할 때 a의 제곱과 b의 제곱의 합이 15이다.

무리수 a의 값이 $\frac{m \pm \sqrt{n}}{2}$ 일 때, $m+n$을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$a^2 + b^2 = 15,\ 0 \le b < 1$

$0 \le b^2 = 15 - a^2 < 1,\quad \sqrt{14} < a \le \sqrt{15}$

따라서 a의 정수 부분은 3이고 $b = a - 3$

$a^2 + (a-3)^2 = 15$

$\therefore a = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

$a > 0$이므로 $a = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$

$\therefore m + n = 3 + 21 = 24$

24. 어느 반 학생들에게 공책 144 권을 똑같이 나누어 주려고 한다. 한 사람에게 돌아가는 공책의 수가 전체 학생 수보다 7 이 적다고 할 때, 한 명에게 돌아가는 공책의 수는?

① 6 권 ② 9 권 ③ 12 권 ④ 16 권 ⑤ 24 권

해설

한 명에게 돌아가는 공책의 수를 x 권, 전체 학생 수를 $(x+7)$ 명이라 하면,

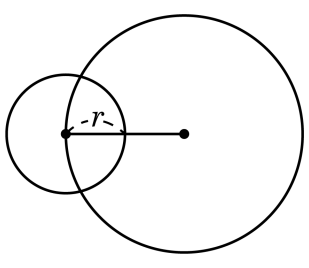
$x(x+7) = 144$

$x^2 + 7x - 144 = 0$

$(x+16)(x-9) = 0$

$\therefore\ x = 9\ (\because x > 0)$

25. 다음 그림과 같이 반지름이 r 인 원과 반지름이 이 원의 두 배인 원이 겹치고 있다. 겹치지 않는 부분의 넓이의 차가 12π 라고 할 때 , 반지름 r 의 값은?

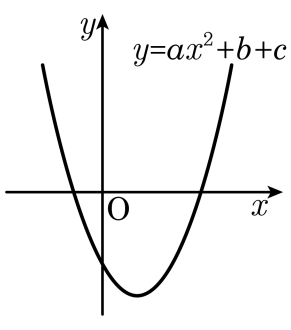


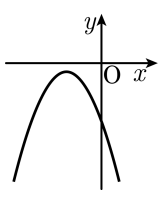
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

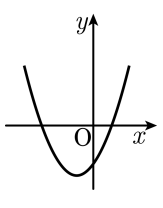
해설

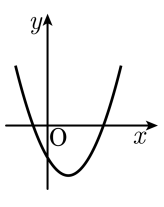
겹치는 부분은 두 원 모두에 있는 부분이므로, 겹치지 않는 부분의 넓이의 차는 두 원의 넓이의 차와 같다.
따라서 식으로 나타내면 $(2r)^2\pi - r^2\pi = 12\pi$ 이다.
$r^2 - 4 = 0$
$\therefore\ r = 2\ (\because r > 0)$

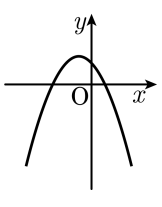
26. $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프의 모양은 어느 것인가?

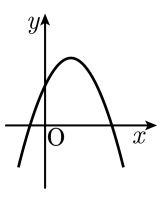


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$

꼭짓점의 x 좌표 $-\dfrac{b}{2a} > 0$ 이므로 $b < 0$

y 절편 $c < 0$

따라서 $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 x 좌표 $-\dfrac{b}{2c} < 0$, y 절편 $a > 0$ 인 포물선이다.

27. 이차방정식 $x^2 + 2x + A = 0$ 의 근이 $x = 2$ 또는 $x = -4$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$(x-2)(x+4) = 0$
$x^2 + 2x - 8 = 0,\ A = -8$

28. a 는 이차방정식 $2x^2-8x-7=0$ 의 한 근이고, b 는 이차방정식 $x^2+6x-5=0$ 의 한 근일 때, $a^2+2b^2-4a+12b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{27}{2}$

해설

$2x^2-8x-7=0$ 의 한 근이 a 이므로 x 에 a 를 대입하면

$2a^2-8a-7=0,\ a^2-4a=\frac{7}{2}\cdots$㉠

$x^2+6x-5=0$ 의 한 근이 b 이므로 x 에 b 를 대입하면 $b^2+6b-5=0,\ b^2+6b=5\cdots$㉡

주어진 식을 변형하면

$a^2+2b^2-4a+12b=a^2-4a+2b^2+12b$

$=(a^2-4a)+2(b^2+6b)$

$=\frac{27}{2}$ 이다.

29. 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이 연속하는 정수이고, q 가 소수일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단 p 는 자연수)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

두 근을 α, $\alpha + 1$ (α 는 정수) 이라 하면

$\alpha + (\alpha + 1) = 2\alpha + 1 = -p$,

$\alpha = \dfrac{-p - 1}{2} \cdots ㉠$

$\alpha(\alpha + 1) = q \cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하여

정리하면 $p^2 - 4q = 1 \cdots ㉢$

㉡으로부터 q 는 짝수가 됨을 알 수 있고 q 는 소수이므로 $q = 2$

$q = 2$ 를 ㉢에 대입하면 자연수 $p = 3$

$\therefore\ p = 3,\ q = 2$

$\therefore p + q = 3 + 2 = 5$

30. x 에 관한 이차방정식 $x^2+2n^2-2x+2n^2x=0$ 의 두 근을 p_n, q_n 이라 하고, $S(n)=\dfrac{1}{(p_1-1)(q_1-1)}+\dfrac{1}{(p_2-1)(q_2-1)}+\cdots+\dfrac{1}{(p_n-1)(q_n-1)}$ 이라고 한다. $S(15)=\dfrac{b}{a}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로 소이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$x^2+2n^2-2x+2n^2x=0$

$x^2-(2-2n^2)x+2n^2=0$

$p_n+q_n=2-2n^2$

$p_nq_n=2n^2$ 이므로

$$\frac{1}{(p_n-1)(q_n-1)}=\frac{1}{p_nq_n-(p_n+q_n)+1}$$

$$=\frac{1}{2n^2+2n^2-2+1}$$

$$=\frac{1}{4n^2-1}$$

$$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\therefore S(n)=\dfrac{1}{(p_1-1)(q_1-1)}+\dfrac{1}{(p_2-1)(q_2-1)}$

$$+\cdots+\frac{1}{(p_n-1)(q_n-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$\therefore S(15)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{31}\right)=\dfrac{15}{31}=\dfrac{b}{a}$

따라서 $a-b=16$ 이다.

31. 이차함수 $f(x)=x^2-3$에 대하여 $f^1(x)=f(x),\ f^{n+1}=f(f^n(x))$라 할 때, $f^{1111}(1)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$f^1(1)=-2$

$f^2(1)=f(-2)=1$

$f^3(1)=f(1)=-2$

$f^4(1)=f(-2)=1$

$\vdots$

$\therefore\ f^{1111}(1)=-2$

32. 이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 이 그래프와 y축에 대하여 대칭인 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ -5)$일 때, apq 의 값을 구하여라.

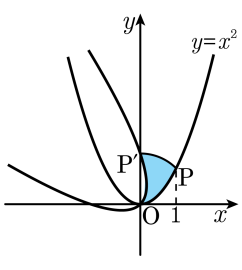
▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{75}{4}$

해설

$y = a(x-p)^2 + q$의 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ q)$
y 축 대칭하면 $(-p,\ q) = (-3,\ -5)$
$\therefore\ p = 3,\ q = -5$
$y = a(x-3)^2 - 5$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
$0 = a(1-3)^2 - 5$
$\therefore\ a = \frac{5}{4}$
$\therefore\ apq = \frac{5}{4} \times 3 \times (-5) = -\frac{75}{4}$

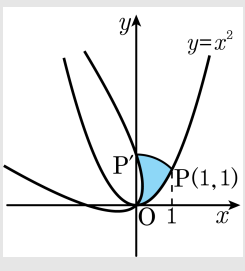
33. 다음 그림과 같이 $y = x^2$ 의 그래프를 원점을 중심으로 회전했을 때, P′ 에 대응한다. 점 P 가 회전한 선과 두 포물선으로 이루어지는 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{4}\pi$

해설



$\overline{OP}$ 를 이으면 두 부분의 넓이가 같아지므로 구하려는 부분의 넓이는 부채꼴 OPP′ 의 넓이와 같다.
점 P 의 좌표가 (1, 1) 이므로
$\angle POP' = 45°$, $\overline{OP} = \sqrt{2}$
따라서 넓이는 $\pi \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{45°}{360°} = \frac{1}{4}\pi$ 이다.