1. 방정식 $|x| + |x-1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

ⅰ) $x < 0$일 때,
$-x - (x-1) = 2$이므로 $-2x + 1 = 2$
$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$
ⅱ) $0 \le x < 1$일 때,
$x - (x-1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$
∴ 해가 없다.
ⅲ) $1 \le x$일 때,
$x + x - 1 = 2$이므로 $2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

2. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

3. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

4. 모든 실수 x에 대하여 x^2+ax+a가 -3보다 항상 크기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $-4<a<3$　　② $-2<a<4$　　③ $-2<a<6$

④ $2<a<4$　　⑤ $2<a<6$

해설

$x^2+ax+a>-3$, $x^2+ax+(a+3)>0$
모든 실수 x에 대하여 성립하려면
이차방정식 $x^2+ax+(a+3)=0$의 판별식을
D라 할 때,
$D<0$이어야 하므로
$D=a^2-4(a+3)<0$
$a^2-4a-12<0$, $(a-6)(a+2)<0$
$\therefore -2<a<6$

5. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 일 때, 이차부등식 $4cx^2-2bx+a<0$ 의 해는?

① $x<-7$ 또는 $x>-5$ ② $-7<x<-5$
③ $-7<x<5$ ④ $5<x<7$
⑤ $x<5$ 또는 $x>7$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$ 이므로
$(14x-1)(10x-1)<0$, $140x^2-24x+1<0$
$-140x^2+24x-1>0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c>0$
$\therefore a=-140, b=24, c=-1 \cdots$ (가)
(가)를 $4cx^2-2bx+a<0$ 에 대입하면
$-4x^2-48x-140<0$
$x^2+12x+35>0$, $(x+7)(x+5)>0$
$\therefore x<-7$ 또는 $x>-5$

6. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \leq 0 \\ |x-1| \leq 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $-3 \leq x \leq 2$ ② $-2 \leq x \leq 2$ ③ $-1 \leq x \leq 2$
④ $0 \leq x \leq 2$ ⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설
$x^2+x-6 \leq 0$ 에서
$(x+3)(x-2) \leq 0$
$-3 \leq x \leq 2 \cdots$ ㈎
$|x-1| \leq 3$ 에서
$-3 \leq x-1 \leq 3$
$-2 \leq x \leq 4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에서 $-2 \leq x \leq 2$

7. 방정식 $x^2+y^2-2x+2y+k=0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k<-2$ ② $k<-1$ ③ $k>-2$
④ $k<2$ ⑤ $k>1$

해설
방정식을 정리하면, $(x-1)^2+(y+1)^2=2-k$
원이 되려면 $2-k>0$ 을 만족해야 한다.
$\therefore\ k<2$

8. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

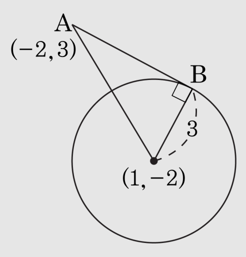
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\ \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



9. 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y=x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$
② $(2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$
③ $(4,\ 4)$
④ $(2\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}+2)$
⑤ $(2\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}-2)$

해설

원 $x^2+y^2=4$
위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은
$-x+\sqrt{3}y=4$ 이므로 이 방정식과
$y=x$ 를 연립하면 $-x+\sqrt{3}x=4$
$\therefore\ x=\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}+2$
따라서 구하는 교점의 좌표는
$(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$

10. 직선 $3x + y - 5 = 0$을 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동하면 직선 $3x + y - 1 = 0$이 된다. 이 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

x축 방향으로 1, y축 방향으로 n만큼 평행이동하므로
직선 $3x + y - 5 = 0$에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y - n$을 대입하면
$3(x - 1) + (y - n) - 5 = 0$
$3x + y - n - 8 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 $3x + y - 1 = 0$과 일치하므로 $-n - 8 = -1 \therefore\ n = -7$

11. 이차방정식 $x^2-x+m=0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2-x+m=0$의 한 근이 2이므로
$x=2$를 대입하면
$2^2-2+m=0 \quad \therefore m=-2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2-x-2=0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x-2)(x+1)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=-1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

12. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \frac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

13. 부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$이고 $f(x)=ax^2+bx+c$일 때, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$일 때 $a<0$이고,

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c \geq 0 &\Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow ax^2+ax-6a \geq 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ b=a,\ c=-6a$

따라서, $f(x)=ax^2+ax-6a$이므로

$f(x)=0$ 의 두 근은 $-3,\ 2$이다.

즉, $f(-3)=0$ 또는 $f(2)=0$이다.

한편, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프와 x 축과의 교점의 x좌표는

방정식 $f(3x-2)=0$의 실근과 같으므로

$f(3x-2)=0$의 두 근은

$3x-2=-3$ 또는 $3x-2=2$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

14. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$
따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0 을 가진다.

15. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

16. $64 \le 16x - x^2$ 의 해를 구하면?

① $4 \le x \le 8$ ② $x = 8$ ③ 해는 없다.

④ 모든 실수 ⑤ $x \le 8$

해설

$64 \le 16x - x^2$

$x^2 - 16x + 64 \le 0$

$\Rightarrow \quad (x-8)^2 \le 0$

$\Rightarrow \quad x = 8$

17. 이차부등식 $x^2 - 3x + 2 < 0$을 만족하는 모든 x 가 이차부등식 $x^2 - 2ax + a - 1 < 0$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 0$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 1$

④ $0 \le a \le 1$ ⑤ $a \ge 1$

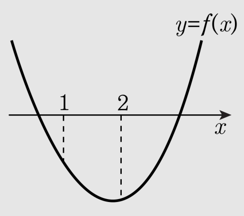
해설

$x^2 - 3x + 2 < 0$에서 $(x-1)(x-2) < 0$

$\therefore 1 < x < 2$

이차부등식 $x^2 - 2ax + a - 1 < 0$ 이 $1 < x < 2$에서 항상 성립해야하므로

$f(x) = x^2 - 2ax + a - 1$로 놓으면 다음 그림과 같이 $f(1) \le 0$, $f(2) \le 0$이어야 한다.



$f(1) = 1 - 2a + a - 1 \le 0$ 에서 $a \ge 0$ ⋯⋯ ㉠

$f(2) = 4 - 4a + a - 1 \le 0$ 에서 $a \ge 1$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a \ge 1$

18. 두 원 $x^2+y^2-2ay+8a-25=0$ 와 $x^2+y^2=1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow \quad x^2+(y-a)^2=a^2-8a+25, \quad x^2+y^2=1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1+\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a-1=\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a=4$

19. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$
② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$
③ $-2 < m < 2$
④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$
⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2 + 1 - 25 < 0$, $m^2 - 24 < 0$
$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$
$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

20. 직선 $3x-y-1=0$ 에 평행하고 원 $x^2+y^2=10$ 에 접하는 접선의 방정식을 $y=mx\pm n$ 이라고 할 때, mn의 값은?

① $3\sqrt{10}$ ② $-3\sqrt{10}$ ③ 30

④ -30 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

접선이 직선 $3x-y-1=0$, 즉 $y=3x-1$에 평행하므로 접선의 기울기는 3이다.
공식을 이용하면 접선의 방정식은
$y=3x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+3^2}$, $y=3x\pm10$ 이므로
$m=3,\ n=10\ \therefore mn=30$

21. 부등식 $|2x-2| < k+2$를 만족하는 실수 x값이 존재하기 위한 실수 k의 값의 범위는?

① $k \le -2$　　② $k > -2$　　③ $k \ge -2$

④ $k < 2$　　⑤ $k \ge 2$

해설

ⅰ) $x \ge 1$일 때,

$2x-2 < k+2,\ 2x < k+4 \quad \therefore x < \frac{1}{2}k+2$

$x \ge 1,\ x < \frac{1}{2}k+2$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$\frac{1}{2}k+2 > 1,\ k > -2$

ⅱ) $x < 1$일 때,

$-2x+2 < k+2,\ -2x < k,\ \therefore\ x > -\frac{1}{2}k$

$x < 1,\ x > -\frac{1}{2}k$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$-\frac{1}{2}k < 1 \quad \therefore k > -2$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $k > -2$

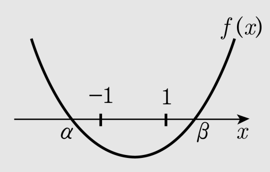
22. 방정식 $x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p의 값의 범위는 ?

① $p>-2$ ② $p>-1$ ③ $p<-2$

④ $p<-1$ ⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근을
$\alpha,\ \beta$ 라 하면



(i) $f(-1)=p+2<0 \quad \therefore p<-2 \cdots$ ①

(ii) $f(1)=3p+2<0 \quad \therefore p<-\frac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p<-2$

23. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{95}$　② $\frac{\sqrt{95}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{95}}{3}$　④ $\frac{\sqrt{95}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{95}}{5}$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

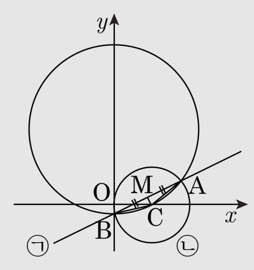
$x^2 + y^2 - 2x - (x^2 + y^2 - 4y - 1) = 0$

$-2x + 4y + 1 = 0$, $2x - 4y - 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 + y^2 - 2x = 0$에서

$(x-1)^2 + y^2 = 1 \cdots\cdots$ ㉡

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B, $\overline{\text{AB}}$의 중점을 M, 원 ㉡의 중심을 C(1, 0)이라 하면



중심 C(1, 0)에서 직선 ㉠까지의 거리 $\overline{\text{CM}}$은

$$\overline{\text{CM}} = \frac{|2-0-1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

원 ㉡의 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\text{AM}} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{95}}{10}$$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{\text{AB}}$는

$$\overline{\text{AB}} = 2\overline{\text{AM}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{95}}{10} = \frac{\sqrt{95}}{5}$$

24. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 위의 점에서 직선 $4x - 3y + 5 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

최댓값은 원 중심에서 직선까지 거리 더하기 반지름이고, 최솟값은 원 중심에서 직선까지 거리 빼기 반지름이다.

원의 방정식 : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

$\Rightarrow$ 최대 : $\dfrac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2 = 5$

$\Rightarrow$ 최소 : $\dfrac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 = 1$

$\therefore$ 최댓값+ 최솟값$= 6$

25. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 의 직선 $y=2x$ 에 대한 대칭점을 Q, 점 Q 를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점을 R 이라 하면 두 점 R 과 P 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, $3a+b$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ 5

해설

$\mathrm{Q}=(X,\ Y)$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 는 $y=2x$ 에 수직하고,
P, Q 의 중점은 $y=2x$ 위에 존재한다.
$\Rightarrow\ \frac{Y-b}{X-a}\times 2=-1,\quad \frac{Y+b}{2}=2\times\frac{X+a}{2}$
두 식을 연립하면, $X=\frac{4b-3a}{5},\quad Y=\frac{4a+3b}{5}$
이제 Q 를 x 축으로 1 평행이동 시키면,
$\mathrm{R}=\left(\frac{4b-3a+5}{5},\ \frac{4a+3b}{5}\right)$
R 과 P 가 $y=x$ 대칭이므로,
$\frac{4b-3a+5}{5}=b,\quad \frac{4a+3b}{5}=a$
정리하면 $3a+b=5,\ a=3b$
두 식을 연립하면, $a=\frac{3}{2},\quad b=\frac{1}{2}$
$\therefore\ 3a+b=5$

26. 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2+y^2=4x$ 를 만족할 때 x^2+y^2 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면, $M-m$ 의 값은 얼마인가?

① 3　　② $\frac{7}{2}$　　③ 4　　④ $\frac{9}{2}$　　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y^2=-2x^2+4x$ 를 x^2+y^2 에 대입하면
$-x^2+4x=-(x-2)^2+4\cdots$ ①
$x,\ y$ 가 실수이므로
$-2x^2+4x\ge 0\ \rightarrow\ x(x-2)\le 0$
$\therefore\ 0\le x\le 2\cdots$ ②
② 의 범위에서 ①의 최대, 최소는
$x=0$ 일 때 최솟값 0, $x=2$ 일 때 최댓값 4 이다.
$\therefore\ M-m=4$