1. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

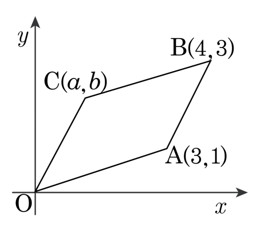
▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로
$(x + 4)(x - 2) < 0$
$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$
$\therefore a = -8$

2. 다음 그림과 같이 네 점 A$(3,\ 1)$, B$(4,\ 3)$, C$(a,\ b)$, O$(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\left(2, \dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b+1}{2}\right)$

$\dfrac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\dfrac{b+1}{2} = \dfrac{3}{2}$ 에서 $b = 2$

$\therefore a+b=3$

3. 세 점 $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(2,-3)$, $\mathrm{C}(k,k-1)$이 같은 직선위에 있도록 상수 k의 값을 구하면?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

해설

세 점이 같은 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기$=$ $\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기

$\Rightarrow$ $\dfrac{k-1+3}{k-2} = \dfrac{-3-1}{2-(-1)}$

$\Rightarrow$ $k = \dfrac{2}{7}$

4. 두 직선 $x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,-1)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$이다. ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow$ $(1,3),(2,-1)$을 지나는 직선

$y=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$

$\Rightarrow$ $y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore$ $ab=-28$

5. x축 위의 점 P로부터 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-2y-2=0$까지의 거리가 같다. 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이라 할 때 $-ab$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2\alpha+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\alpha-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$\therefore |2\alpha+1|=|\alpha-2|$

$\therefore 2\alpha+1=\pm(\alpha-2)$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3},\ -3$

$\therefore \left(\frac{1}{3},\ 0\right)$, $(-3,\ 0)$이므로

$-ab=-\frac{1}{3}\times -3=1$

6. 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동하면 처음 위치로 돌아온다. 이 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

먼저 점 $(-1, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(-1+6, -2)$, 즉 $(5, -2)$
점 $(5, -2)$ 를 다시 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
$(2a-5, -2)$
이 때, 이것이 $(-1, -2)$ 와 같으므로 $2a-5 = -1$
$\therefore a = 2$

7. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면
$1 \le -x \le 2$
다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$
각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$
각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$
$\therefore p = 3, q = 4$
$\therefore pq = 12$

8. 부등식 $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right| \le 1$을 만족하는 자연수 x의 개수를 구하면?

① 13 개 ② 9 개 ③ 6 개 ④ 4 개 ⑤ 2 개

해설

$-1 \le \frac{1}{2}-\frac{1}{3}x \le 1$

$-6 \le 3-2x \le 6$

$-9 \le -2x \le 3$

$\therefore -\frac{3}{2} \le x \le \frac{9}{2}$

그런데 x는 자연수 이므로 1, 2, 3, 4이다.

9. 모든 실수 x에 대하여 $(a^2-1)x^2-(a-1)x+1>0$이 성립할 때 a의 범위를 구하면?

① $a<-\frac{2}{3},\ a\ge 1$　② $-1<a<1$　③ $a<-1,\ a>1$
④ $a<-\frac{5}{3},\ a\ge 1$　⑤ $-\frac{5}{3}<\ a<1$

해설

(1) $a=1$일 때
(좌변)$=1>0$이므로 항상 성립한다.
(2) $a\ne 1$일 때
주어진 식이 성립하려면
$a^2-1>0,\ D<0$이어야 한다.
따라서 $a^2-1>0$에서 $(a-1)(a+1)>0$
$\therefore\ a<-1,\ a>1$
또 $D=(a-1)^2-4(a^2-1)<0$에서
$3a^2+2a-5>0,\ (3a+5)(a-1)>0$
$\therefore\ a<-\frac{5}{3},\ a>1$
(1), (2)에서 $a<-\frac{5}{3},\ a\ge 1$

10. a를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a,\ a) = (-2,\ 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

11. 두 점 A$(-3,\ 0)$, B$(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = 2 : 1$ 을 만족시키는 점 P$(x,\ y)$ 의 자취의 방정식을 구하면 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 이다. 이때, $a+b+r$ 의 값은? (단, $r>0$)

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(x+3)^2+y^2 = 4\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$

$3x^2+3y^2-30x+27=0,\ (x-5)^2+y^2=16$

$\therefore a=5,\ b=0,\ r=4$

$\therefore a+b+r=5+0+4=9$

12. 두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$가 외접할 때, r의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$, $(x+3)^2+(y-4)^2=4$의 중심 사이의 거리 $d=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원이 외접하면 $r+2=5$이므로 $r=3$

13. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$

$\therefore\ n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5 이다.

14. 점 A$(0,\ a)$ 에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1　② $-\sqrt{2}$　③ 2　④ $3\sqrt{2}$　⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx+a$ 이다. 원의 중심 $(0,\ 2)$ 에서 직선 $mx-y+a=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\dfrac{|m\times 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$
$\therefore\ |a-2|=3\sqrt{m^2+1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-(a^2-4a-5)=0$ 이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$ 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로
$m_1m_2=-\dfrac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1$, $a^2-4a-14=0$
$\therefore\ a=2\pm 3\sqrt{2}$
따라서, 구하는 a 의 값들의 합은
$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$

15. 점 $(2,\ 3)$ 을 점$(1,\ 5)$ 로 옮기는 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가 직선 $y=3x-2$ 로 옮겨질 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -21

해설

평행이동 T 에 의하여 점 $(2, 3)$ 이 점$(1, 5)$ 로 옮겨지므로
$T : (x, y) \to (x+m, y+n)$ 이라고 하면,
$(2, 3) \xrightarrow{T} (1, 5)$ 에서
$2+m=1, 3+n=5 \qquad \therefore m=-1, n=2$
$\therefore T : (x, y) \to (x-1, y+2)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 평행이동이다.
한편, 평행이동 T 에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가
옮겨지는 직선의 방정식은
$y-2=a(x+1)+b$
$\therefore y=ax+a+b+2 \cdots\cdots$ ㉠
이때, ㉠이 $y=3x-2$ 와 같아야 하므로
$a=3, a+b+2=-2$
$\therefore a=3, b=-7 \qquad \therefore ab=-21$

16. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $f(x, y) = 0$ 일 때, $f(x - a,\ y - b) = 0$ 은 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 된다. 이 때, $a + b$ 의 값을 모두 구하면?

① 0, 2, 4　　② 1, 4, 5　　③ −2, 2, −6

④ 4, 5, 6　　⑤ −1, 3, 4

해설

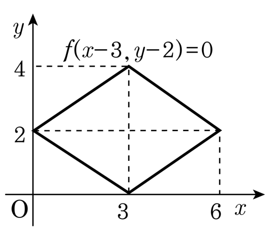
원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0, 1)$ 에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2 + (y - 2)^2 = 4$ 이다.
이 원을 x 축으로 a 만큼,
y 축으로 b 만큼 이동시킨 도형이
x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 되므로,

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$

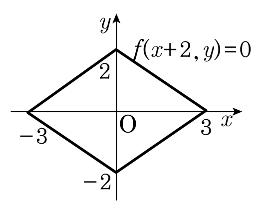
또는 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$

따라서 $a + b = 2$ 또는 -2 또는 -6

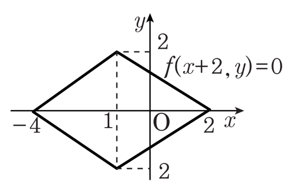
17. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



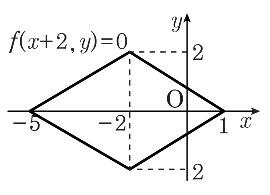
①



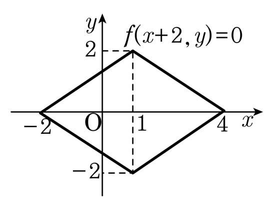
②



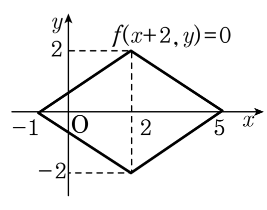
③



④

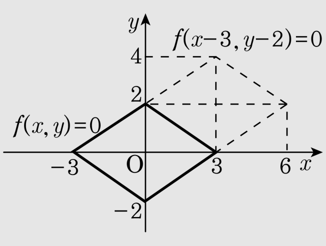


⑤

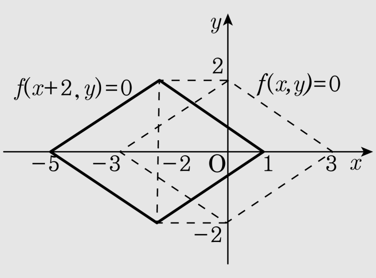


해설

주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을
x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



18. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 -2, 1 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \le 2$　　② $-2 < a < 4$　　③ $-4 \le a \le 2$
④ $\frac{2}{3} < a \le 4$　　⑤ $a \ge 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$의 두 근이 -2와 1
사이에 있으므로
(i) $D = a^2 - 4(2a - 3) \ge 0$에서
$a^2 - 8a + 12 \ge 0$, $(a-2)(a-6) \ge 0$
$\therefore\ a \le 2$ 또는 $a \ge 6$
(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$에서
$1 > 0$이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$에서
$3a > 2 \quad \therefore\ a > \frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y = f(x)$의 그래프의 축의
방정식이 $x = -\frac{a}{2}$이므로
$-2 < -\frac{a}{2} < 1$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 a의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \le 2$

19. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

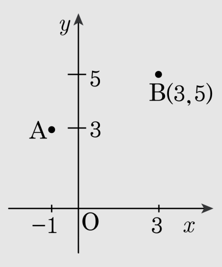
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



20. 세 직선 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \\ ax+y=0 \end{cases}$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 모든 상수 a 의 값을 구하면?

① $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

② $a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

③ $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

④ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

⑤ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

해설

$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y=-4 & \cdots ㉡ \\ ax+y=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$

에서 ㉠, ㉡의 교점은 $(1,\ 2)$ 이다.

(i) ㉢이 점$(1,\ 2)$ 를 지날 때, $a+2=0$ 에서 $a=-2$

(ii) ㉢이 ㉠과 평행할 때, $a=\frac{1}{2}$

(iii) ㉢이 ㉡과 평행할 때, $a=-\frac{2}{3}$

이상에서 구하는 모든 상수 a 의 값은

$a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

또는 $a=-\frac{2}{3}$ 이다.

21. 점 $A(2,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 기울기를 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은 ?

① $\frac{8}{3}$　② $-\frac{8}{3}$　③ 1　④ -1　⑤ 0

해설

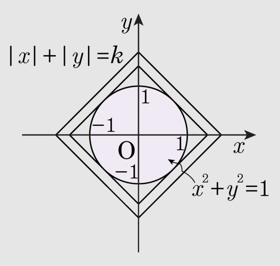
점 $(2,\ 2)$를 지나고 기울기 m인 접선을
$y-2=m(x-2)$ 즉, $mx-y-2m+2=0$
이라고 하면
원의 중심 $(0,\ 0)$에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\frac{|-2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m+2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2-8m+3=0$
따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

22. 부등식 $x^2 + y^2 \leq 1$ 의 영역이 부등식 $|\,x\,| + |\,y\,| \leq k$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 k 의 범위는?

① $k \geq \sqrt{2}$　　② $k < \sqrt{2}$　　③ $k \geq \sqrt{3}$

④ $k < \sqrt{3}$　　⑤ $k \geq 1$

해설



주어진 영역을 그리면,
$x^2 + y^2 \leq 1$ 은 원의 내부이다.
그리고 $|\,x\,| + |\,y\,| \leq k$ 는 $x + y = k$ 의 그래프를
x 축과 y 축에 대칭을 시킨 마름모이다.
그러므로 $x^2 + y^2 \leq 1$ 이 $|\,x\,| + |\,y\,| \leq k$ 에 포함되기 위해서는
원이 마름모에 포함이 되어야 한다.
따라서 직선 $x + y = k$ 와 원의 중심과의 거리가 반지름보다 크거나 같아야 한다.

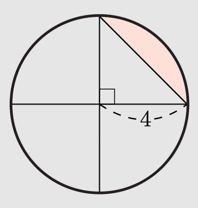
즉, $\dfrac{|\,k\,|}{\sqrt{1+1}} \geq 1$, $|\,k\,| \geq \sqrt{2}$, $\therefore\ k \geq \sqrt{2}$

23. 두 부등식 $x^2+y^2 \le 16$, $(x-4)^2+(y-4)^2 \le 16$을 동시에 만족시키는 영역의 넓이를 구하면?

① $8(\pi-1)$　② $8(\pi-2)$　③ $4(\pi-1)$
④ $4(\pi-2)$　⑤ $2(\pi-1)$

해설

두 원의 교점은
$(0,4), (4,0)$ 이다.
따라서 두 부등식을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는 다음 그림의 색칠된 부분 넓이의 두배와 같다.



$\therefore 2\times\left(\pi\times\frac{4^2}{4}-\frac{1}{2}\times4\times4\right)=8(\pi-2)$

24. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = mx + n$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 두 교점과 점 $\mathrm{P}(2,\ 5)$ 를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 1)$ 일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 교점을 $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2)$ 라 하면

$x^2 - 6x = mx + n$, $x^2 - (m+6)x - n = 0$ 의 두 근이 $x_1,\ x_2$ 이므로

근과 계수와의 관계에 의해 $x_1 + x_2 = m + 6$ 이다.

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 와 $\mathrm{P}(2,\ 5)$ 의 무게중심이 $(4,\ 1)$ 이므로

$\dfrac{x_1 + x_2 + 2}{3} = 4$ 에서 $x_1 + x_2 = 10$ 이므로

$m + 6 = 10 \quad \therefore\ m = 4$

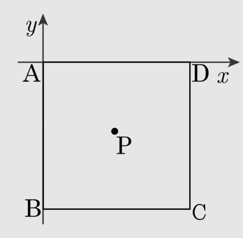
25. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

A(0, 0), B(0, -2),

D(2, 0), P(a, b)라고하면 $2 \cdot \overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$이므로



$2 \cdot (a^2 + b^2)$

$= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$

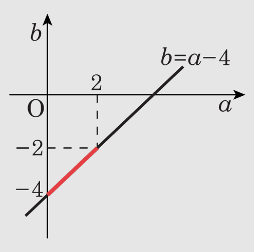
$0 = b - a + 4$

$\therefore$ P(a, b) $= (a, a-4)$

점 P의 자취는 $b = a - 4$ $(0 < a < 2)$ 와 같으므로

구하는 길이는 두 점 $(0, -4)$아 $(2, -2)$ 사이의 거리와 같다.

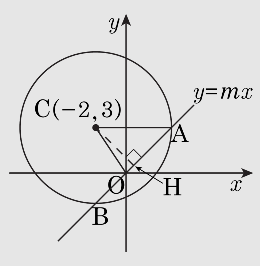
$\therefore \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$



26. 직선 $y = mx$ 와 원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ 의 두 교점을 A, B 라 할 때, 현 AB 의 길이가 최소가 되도록 하는 상수 m 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설



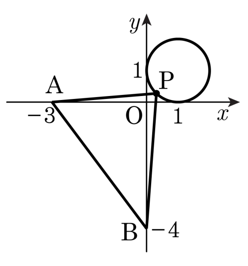
그림과 같이 원의 중심 C(−2, 3) 에서
직선 $y = mx$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\triangle$CAH 에서 $\overline{AH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CH}^2$
$= 25 - \overline{CH}^2$

따라서 $\overline{CH}$ 가 최대일 때, $\overline{AH}$가 최소이다.
$\triangle$COH 에서 $\overline{CH}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{OH}^2$
$\overline{CH}$가 최대가 되기 위해서는
$\overline{CH} = \overline{CO}$ $(\overline{OH} = 0)$ 일 때이므로
$\overline{CO} \perp \overline{AB}$

직선 OC 의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

27. 다음 그림과 같이 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 위의 임의의 점 P 와 두 점 $A(-3,0)$, $B(0,-4)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP 의 넓이의 최솟값은?



① $\frac{21}{5}$　② $\frac{31}{5}$　③ 7
④ $\frac{15}{2}$　⑤ 8

해설

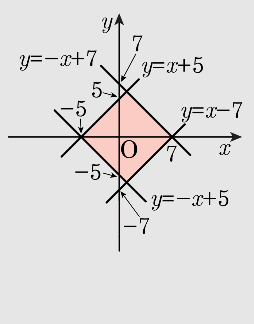
$\triangle$ABP 의 넓이가 최소이려면 $\triangle$ABP 의 높이,
즉 점 P 에서 직선 AB 에 이르는 거리가 최소이어야 한다.
이때, $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$
직선 AB 의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x-4$,
즉, $4x+3y+12=0$ 이고, 원의 중심 $(1,1)$ 에서 직선 AB 에 이르는 거리는
$\frac{|4+3+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{19}{5}$ 이므로
점 P 에서 직선 AB 에 이르는 거리의 최솟값은
$\frac{19}{5}-1=\frac{14}{5}$
따라서, $\triangle$ABP 의 넓이의 최솟값은
$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{14}{5}=7$

28. $y \leq x+5,\ y \leq -x+7,\ y \geq x-7$ 그리고 $y \geq -x-5$ 로 둘러싸인 도형에 내접하는 원의 반지름 중 최댓값은?

① 12　② 6　③ 9　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

도형의 영역은 빗금 친 부분(경계선 포함)에 해당 된다.



내접하는 원의 반지름이 최대이려면 각 직선에 접하는 경우로서, 평행한 두 직선의 거리의 $\frac{1}{2}$ 일 때이다.

점 $(0,\ 5)$ 와 직선 $x-y-7=0$ 의 거리 d 는

$$d=\frac{|0-5-7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$

$\therefore$ 최대의 반지름 : $\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$