

1. 부등식 $|2x - 1| < 8 - x$ 를 만족하는 정수 x 의 개수는?

- ① 7개 ② 8개 ③ 9개 ④ 10개 ⑤ 11개

해설

(i) $8 - x > 0 \quad \therefore x < 8$
(ii) $|2x - 1| < 8 - x$ 에서 $-8 + x < 2x - 1 < 8 - x$
 $-8 + x < 2x - 1$ 에서 $-x < 7, x > -7$
 $2x - 1 < 8 - x$ 에서 $3x < 9, x < 3$
 $\therefore -7 < x < 3$

2. x 에 관한 이차부등식 $ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

- ① $a < b$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
② $a < b$ 일 때, $x \leq -1, x \geq 3$ 이다.
③ $a < 0$ 일 때, $-1 \leq x \leq 3$ 이다.
④ $b < 0$ 일 때, $x \leq -1, x \geq 3$ 이다.
⑤ $a \geq b$ 일 때, 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

해설

$ax^2 - 2ax - 3a \geq bx^2 - 2bx - 3b$ 을 이항하여 정리하면
 $(a - b)x^2 - 2(a - b)x - 3(a - b) \geq 0$ (이차부등식이므로 $a \neq b$)
i) $a < b$ 이면 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 3$
ii) $a > b$ 이면
 $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1, x \geq 3$

3. 이차부등식 $ax^2 + 4x + 4a < 0$ 의 해가 존재하도록 실수 a 의 범위를 구하면? (단, $a > 0$)

① $a > 0$

② $a < 1$

③ $0 < a < \frac{1}{3}$

④ $0 < a < \frac{1}{2}$

⑤ $0 < a < 1$

해설

해가 존재하면 판별식이 0보다 커야한다.

$$D' = 2^2 - 4a^2 > 0$$

$$-1 < a < 1$$

$$\therefore 0 < a < 1 (\because a > 0)$$

4. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이라면
 $(x - 1)(x - 4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
 $a = -5$, $b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

5. 둘레의 길이가 24 cm 인 직사각형의 넓이를 35 cm^2 이상 되도록 할 때, 그 한 변의 길이 a 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 cm ② 10 cm ③ 12 cm ④ 15 cm ⑤ 19 cm

해설

한 변의 길이가 a 이므로 다른 한 변의 길이는 $12 - a$ 이다.

$a(12 - a) \geq 35$ 에서 $(a - 5)(a - 7) \leq 0$

$\therefore 5 \leq a \leq 7$

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 12 cm

6. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \geq a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$

② $-2 \leq a \leq 2$

③ $0 \leq a \leq 4$

④ $2 \leq a \leq 4$

⑤ $4 \leq a \leq 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고

$-2 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.

$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,

$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \geq 0$

$a^2 - 6a + 8 \leq 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) \leq 0$

$\therefore 2 \leq a \leq 4$

7.
$$\begin{cases} (x-4)(x-2) \geq 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$$
 을 만족하는 해의 범위가

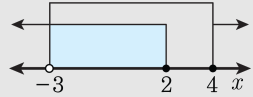
$a < x \leq b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$(x-4)(x-2) \geq 0, x \leq 2, x \geq 4$$

$$(x+3)(x-4) < 0, -3 < x < 4$$



$$\therefore -3 < x \leq 2$$

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$

8. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \leq 5$ 이 되도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 2

해설

첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \leq 0$

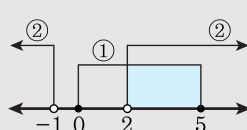
$\therefore 0 \leq x \leq 5 \dots\dots ①$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \dots\dots ②$

①, ②를 동시에 만족하는 해가

$2 < x \leq 5$ 이므로 a 의 값은 2이다.



9. 이차방정식 $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

- ① $m \leq -6$ ② $m \leq -4$ ③ $m \leq -2$
 ④ $m \leq 0$ ⑤ $m \leq 2$

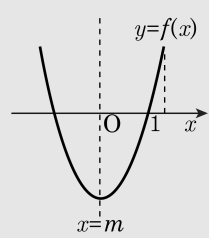
해설

$f(x) = x^2 - 2mx + m + 6 = (x - m)^2 - m^2 + m + 6$ 으로 놓으면

$$\frac{D}{4} = m^2 - 1 \cdot (m + 6) = m^2 - m - 6$$

$$f(1) = 1 - 2m + m + 6 = -m + 7$$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4} = m^2 - m - 6 \geq 0$

$$(m + 2)(m - 3) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -2 \text{ 또는 } m \geq 3 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

(ii) 경계값의 부호 : $f(1) = -m + 7 > 0$

$$\therefore m < 7 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

(iii) 축 : $m < 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m 의 값의 범위는 $m \leq -2$

10. $\triangle ABC$ 에서 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P(a , b)라 하면

$$(1) \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \dots\dots\textcircled{2}$$

①, ②를 각각 전개하여 정리하면

$$7a - b - 16 = 0, \quad 2a - b - 6 = 0$$

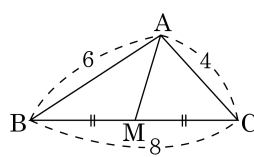
연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

따라서 외심은 (2, -2)이다.

$$(2) \overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$$

$$\therefore PA = 5$$

11. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

12. 좌표평면에 두 점 A(1, 3), B(2, -1) 이 있다. 점 C(m, 2) 에 대하여 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소일 때의 m 의 값을 구하면?

- ① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소인 경우는

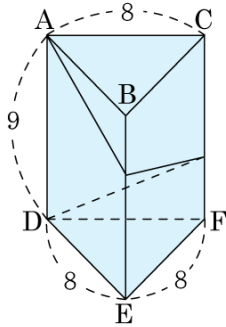
세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때이므로

직선 AB 와 BC 의 기울기가 같다.

$$\text{따라서 } \frac{-1-3}{2-1} = \frac{2-(-1)}{m-2}$$

$$\therefore m = \frac{5}{4}$$

13. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

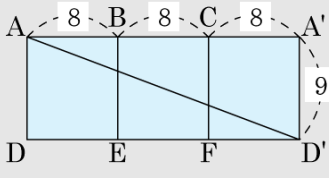


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$$\overline{AD'} = \frac{\sqrt{24^2 + 9^2}}{\sqrt{576 + 81}} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{657}} = 3\sqrt{73}$$



14. 다음 그림과 같이 두 점 A, B가 수직선 상에 위치해 있다. 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 D, 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점을 E, 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점을 F, 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점을 G라 하자. 점 D, E, F, G를 수직선 위에서 왼쪽부터 순서대로 적으시오.



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 점 E

▷ 정답 : 점 D

▷ 정답 : 점 F

▷ 정답 : 점 G

해설

다음 그림에서 보듯이, 점의 순서는 E, D, F, G 이다.



15. 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 A(-1, 4), B(0, 3) 이고, 무게중심의 좌표가 G(2, 1) 일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

- ① (7, -4) ② (3, -6) ③ (5, -5)
④ (-1, 8) ⑤ (1, 1)

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

C = (x, y) 라 하면

$$\left(\frac{-1+0+x}{3}, \frac{4+3+y}{3} \right) = (2, 1)$$

$$\therefore x = 7 \quad y = -4$$

$$\therefore C = (7, -4)$$

16. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

17. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 모두 고르면?

- ㉠ 점 $(0, 5)$ 를 지나고, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선 $\rightarrow y = x + 5$
- ㉡ 두 점 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$ 을 지나는 직선 $\rightarrow y = -2x + 1$
- ㉢ x 절편이 2 , y 절편이 -2 인 직선 $\rightarrow y = 2x - 2$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ (기울기) $=\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이고 y 절편이 5 이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$
- ㉡ $y + 1 = \frac{3 - (-1)}{-1 - 1}(x - 1)$, $\therefore y = -2x + 1$
- ㉢ $\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$, $\therefore y = x - 2$
- 따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

18. $ab < 0$, $bc < 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

- ① 제1 사분면 ② 제2, 3 사분면 ③ 제4 사분면
④ 제3 사분면 ⑤ 제3, 4 사분면

해설

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$ab < 0$, $bc < 0$ 이므로 기울기는 양수, y 절편은 양수이다.

$\therefore$ 제4분면은 지나지 않는다.

19. 직선 $2x + y + 3 = 0$ 은 직선 $ax + by - 5 = 0$ 과는 평행하고, 직선 $2x + ay + b = 0$ 과는 수직이라 한다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -6 ② -8 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$ax + by - 5 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{5}{b} \cdots \textcircled{A}$$

$$2x + ay + b = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{B}$$

① 은 $y = -2x - 3$ 에 평행하므로, $\frac{a}{b} = 2$

② 는 $y = -2x - 3$ 에 수직하므로,

$$-2 \times \left(-\frac{2}{a}\right) = -1 \Rightarrow a = -4$$

$$\therefore a = -4 \quad b = -2 \quad \therefore a + b = -6$$

20. 두 점 A(-2, -1), B(4, 3) 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB의 중점의 좌표는 (1, 1)

선분 AB의 기울기는 $\frac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB의 수직이등분선은 점 (1, 1)을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

21. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로 } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

22. 두 직선 $3x - 3y - 6 = 0$, $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

평행한 두 직선 사이 거리는 항상 일정하므로
두 직선 중 한 직선 위의 점을 잡고 다른 직선까지의 거리를
구하면 된다.

즉, $3x - 3y - 6 = 0$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서

$x - y - 4 = 0$ 에 이르는 거리를 구하면 된다.

$$\text{거리}는 d = \frac{|1 \times 3 - 1 \times 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

23. 직선 $3x + 4y = 0$ 에 평행하고 원점으로부터 거리가 3 인 직선 중 1 사분면을 지나는 직선의 y 절편은?

① 15 ② -15 ③ $\frac{15}{4}$ ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ 3

해설

직선을 $3x + 4y + a = 0$ 라 하면,

$$\frac{|a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \text{ 에서}$$

$$\therefore a = \pm 15$$

$$y \text{ 에 대해 정리하면 } y = -\frac{3}{4}x \pm \frac{15}{4}$$

기울기가 음수인 직선이 1 사분면을 지나기 위해서는 y 절편은 양수이어야 한다.

따라서 이 직선의 y 절편은 $\frac{15}{4}$

24. 꼭짓점의 좌표가 A(0, 0), B(36, 15), C(a, b)인 삼각형 ABC가 있다.

a, b가 정수일 때, △ABC의 넓이의 최소는?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{13}{2}$
- ⑤ 최소값은 없다

해설

직선 $\overline{AB}$ 의 방정식은 $5x - 12y = 0$

△ABC의 높이 h 는

$$h = \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

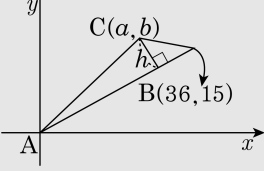
△ABC의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{12^2 + 5^2} \cdot \frac{|5a - 12b|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{3}{2} |5a - 12b|$$

a, b는 정수이므로, $|5a - 12b| = 1$ 일 때,

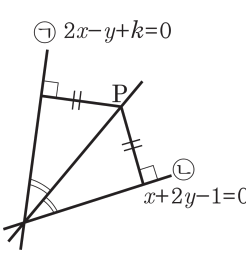
S의 최소는 $\frac{3}{2}$

실제로 $(a, b) = (5, 2)$ 또는 $(7, 3)$ 일 때이다.



25. 두 직선 $2x - y + k = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3, 1)$ 을 지날 때, 상수 k 의 값의 합을 구하면?

- ① -2 ② 4 ③ -6
 ④ 8 ⑤ -10



해설

$2x - y + k = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $x + 2y - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 (점 P와 $\textcircled{1}$ 사이의 거리) = (점 P와 $\textcircled{2}$ 사이의 거리) 이므로
 $\frac{|6 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow |5 + k| = 4$
 $\Rightarrow 5 + k = \pm 4 \Rightarrow k = -9$ 또는 $k = -1$
 $\therefore k$ 의 합 : -10

26. 중심이 직선 $3x + y = 12$ 의 제 1 사분면 위에 있고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 중심이 (a, b) 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
중심의 좌표는 (r, r) 이다.
따라서, 구하는 원의 방정식을
 $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
한편, 점 (r, r) 는 직선 $3x + y = 12$ 위에 있으므로 $3r + r = 12$
 $\therefore r = 3$
따라서, 구하는 원의 방정식은 $\textcircled{1}$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

27. 두 점 A(0, 0), B(3, 3)에 대하여 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \geq 2$ 가 되도록 점 P가 움직일 때, 점 P가 그리는 자취의 넓이는?

- ① 8π ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ 4π ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ 16π

해설

점 P를 (x, y) 라 하면 $\overline{AP} \geq 2\overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 \geq 4(x-3)^2 + 4(y-3)^2$

$$\therefore x^2 - 8x + y^2 - 8y + 24 \leq 0$$

$$\text{즉, } (x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 8$$

따라서 구하는 자취는 중심이 (4, 4) 이고, 반지름이 $2\sqrt{2}$ 인 원의 내부이다.

그러므로 구하는 넓이는 8π 이다.

28. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ 과 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

③ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$

④ $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 + k(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

이 원이 원점을 지나므로

$x = y = 0$ 을 대입하면

$$-2 - k = 0$$

$$\therefore k = -2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 - 2(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

$$-x^2 - y^2 + 6x - 4y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

29. 원 O 와 O' 의 반지름의 길이가 각각 3cm, 4cm 이고, 중심거리가 5cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

① 3.2 ② 3.6 ③ 4.2 ④ 4.8 ⑤ 5.2

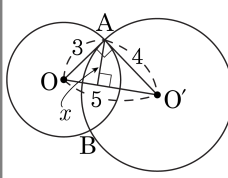
해설

$\triangle AOO'$ 에서 넓이는 6이다.

$$6 = \frac{1}{2} \times 5 \times x$$

$$\therefore x = \frac{12}{5}$$

따라서 공통현의 길이는 $2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$



30. 두 원 $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

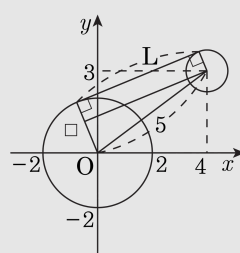
① $2\sqrt{6}$ ② 4 ③ 5 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 = 4$, $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$
 의 외접선의 길이는 그림의 L 과 같다.
 두 중심사이의 거리는 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 이므로

$$\Rightarrow L^2 = 5^2 - (2 - 1)^2 = 24$$

$$\therefore L = 2\sqrt{6}$$

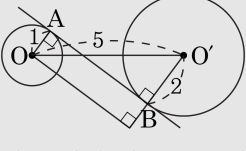


31. 반지름의 길이가 각각 1, 2인 두 원 O, O'의 중심거리가 5일 때, 두 원의 공통내접선의 길이는?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

주어진 두 원의 그래프를 다음 그림과 같이 나타내면 $\overline{AB}$ 가 공통내접선이 된다.



점 O에서 선분 O'B의 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{AO} = \overline{BH} = 1$
 $\therefore \overline{O'H} = 1 + 2 = 3$
이때, 두 원의 중심거리가 5이므로 $\triangle OHO'$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여
 $\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

- 32.** 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 19개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$$d = \frac{|3 \times 0 + 4 \times 0 + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|a|}{5} < 2 = r$$

$$\frac{|a|}{5} < 2, |a| < 10, -10 < a < 10$$

$$a = -9, -8, -7, -6, \dots, 6, 7, 8, 9 \therefore 19 \text{개}$$

33. 직선 $y = x + k$ 가 원 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 와 만나서 생기는 현의 길이가 8 일 때, 상수 k 의 값은?

- ① $2\sqrt{3}$
 ② $\pm 2\sqrt{3}$
 ③ $3\sqrt{2}$
- ④ $-3\sqrt{2}$
 ⑤ $\pm 3\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 $O(1, 1)$ 에서 직선 $x - y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

직각삼각형 OHA에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \dots \textcircled{㉠}$$

또 원의 중심 $O(1, 1)$ 에서
 직선 $x - y + k = 0$
 사이의 거리가 $\overline{OH}$ 이므로

$$\overline{OH} = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{|k|}{\sqrt{2}} = 3$

$\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$

34. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

35. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?
- ① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$
② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$
③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$
④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$
⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로
 $y = 2x + b \cdots \cdots \textcircled{1}$ 로 놓을 수 있다.
이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서
 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$ 이므로
중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.
따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,
즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로
$$\frac{|2 + 3 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$
 $|b + 5| = 10, b + 5 = \pm 10$ $\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
 $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

해설

$\textcircled{1}$ 을 원의 방정식에 대입하면
 $x^2 + (2x + b)^2 - 2x + 6(2x + b) - 10 = 0$
 $5x^2 + 2(5 + 2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$$\frac{D}{4} = (5 + 2b)^2 - 5(b^2 + 6b - 10) = 0$$
 $b^2 + 10b - 75 = 0, (b - 5)(b + 15) = 0$ $\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$ 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
 $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

36. 점 (3, 1) 에서 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 두 접선의 방정식을 구하면 $x - y = 2$, $ax + by = 10$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하면?

- ① 1
- ② 5
- ③ 7
- ④ 9
- ⑤ 12

해설

점 (3, 1) 을 지나므로 $3a + b = 10 \cdots \textcircled{1}$
원의 중심과 직선 사이의 거리는 원의 반지름과 같으므로
 $\frac{|-10|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}, \quad a^2 + b^2 = 50 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면,
 $a^2 + (10 - 3a)^2 = 50$
 $10a^2 - 60a + 50 = 0$
 $a^2 - 6a + 5 = 0$
 $\therefore a = 1, 5$
 $\therefore a = 5, b = -5$ 또는 $a = 1, b = 7$
한 접선의 방정식이 $x - y = 2$ 이므로,
 $a = 1, b = 7$
 $\therefore ab = 7$

37. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로

원의 중심은 (0, 4)이고, 반지름은 5이다.

그런데 중심 (0, 4)에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소거리는

$$d - (\text{원의 반지름}) = 8 - 5 = 3$$

38. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6)에 대하여 삼각형 OAB의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

39. 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2 |x| \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 = 2 |x + y| \cdots \textcircled{L}$$

Ⓣ)과 Ⓛ)에서 $2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x + y$
 $\therefore x \mid y = \pm x$

$$\therefore x + y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{C}$$

㉠과 ㉡의 교점의 개수는 다음 그림
에서 5개이다.

에서 5개이다.

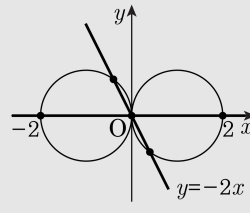
실제로, 교점을 구하면

$$(0, 0), (\pm 2, 0),$$

$$\left(\pm \frac{2}{5}, \mp \frac{4}{5}\right)$$

(복부호동순)

(복부호동순)



40. 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$ 을 x 축 방향으로 p 만큼, y 축방향으로 q 만큼 평행이동시키면 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + c = 0$ 이 된다. 이 때, $pq + c$ 의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

원을 평행이동시키면 반지름의 길이는 변하지 않고, 중심좌표만 변한다.

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + c = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 10 - c$$

$\therefore (-1, 1) \rightarrow (1, -3)$ 이므로, x 축으로 2만큼, y 축으로 -4 만큼 평행이동한 것이고, $8 = 10 - c$ 에서 $c = 2$ 이다.

$$\therefore pq + c = 2 \cdot (-4) + 2 = -6$$

41. 점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3, 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$(-1, 2)$

$\xrightarrow{\text{원점대칭}}$

$(1, -2)$

$\xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}}$

$(1 + a, -2)$

$\xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}}$

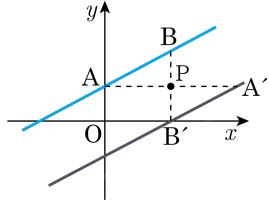
$(1 + a, -2 + b)$

$\xrightarrow{y=x\text{대칭}}$

$(-2 + b, 1 + a) = (3, 2)$

$\therefore a = 1, b = 5$

42. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점은 각각 A', B'이고, 직선 AB의 방정식은 $x - 2y + 4 = 0$ 이라 한다. 점 A'의 좌표가 (3, 1), 직선 A'B'의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱은?



- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A', B'은 각각 점 P에 대한 두 점 A, B의 대칭점이므로 직선 A'B'은 직선 AB의 점대칭도형이다.

즉, $\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각)이므로

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$

따라서, 직선 A'B'의 기울기는 직선 AB의

기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또, 직선 A'B'은 점 A'(3, 1)을 지나므로 직선 A'B'의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

따라서, $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$ab = -\frac{1}{4}$$

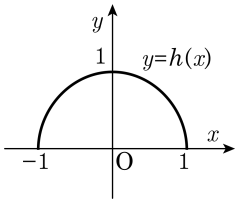
43. 직선 $y = 2x + 5$ 를 직선 $y = -1$ 에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

- ① $y = 2x - 19$ ② $y = 8x + 12$ ③ $y = 3x - 1$
④ $y = -4x - 5$ ⑤ $y = -x + 10$

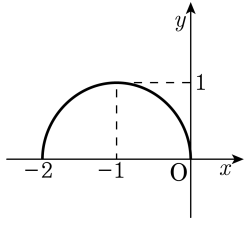
해설

직선 $y = 2x + 5$ 를 직선 $y = -1$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
 y 대신 $2 \cdot (-1) - y$ 를 대입하면 $-2 - y = 2x + 5$,
즉 $y = -2x - 7$
이것을 다시 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동한
도형의 방정식은
 x 대신 $2 \cdot 3 - x$ 를 대입하면 $y = -2(6 - x) - 7$
 $\therefore y = 2x - 19$

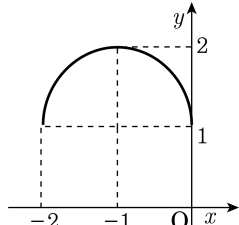
44. 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)+1$,
 $h(x) = g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y = h(x)$ 의
 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지
 름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음
 중 $y = f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



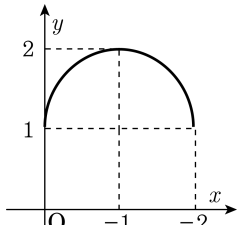
①



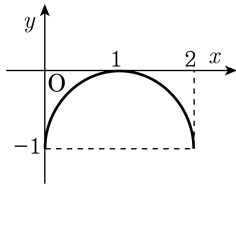
②



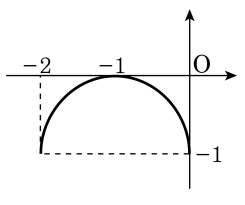
③



④

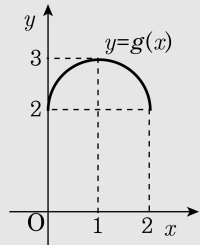


⑤

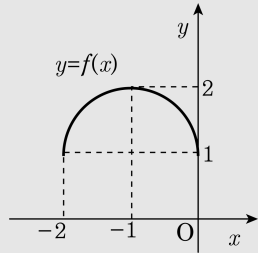


해설

$y = h(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
 $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = h(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
 평행이동한 것이다.
 따라서, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



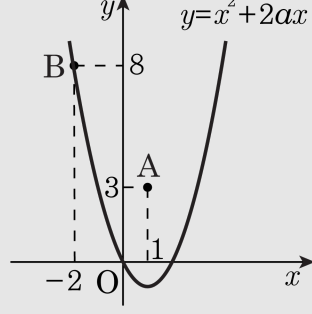
또, $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
 평행이동한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는
 $y = g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서, $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



45. 두 점 A(1, 3), B(-2, 8)이 포물선 $y = x^2 + 2ax$ 에 대하여 한 점은 위쪽에 있고 다른 한 점은 아래쪽에 있을 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

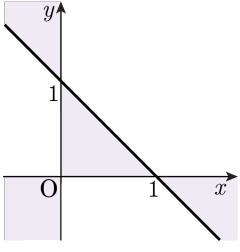
- ① $a < -1$ 또는 $a > 1$ ② $a < -2$ 또는 $a > 2$
 ③ $a < -3$ 또는 $a > 3$ ④ $a < -4$ 또는 $a > 4$
 ⑤ $a < -5$ 또는 $a > 5$

해설



$f(x, y) = x^2 + 2ax - y \cdots \textcircled{1}$ 로 놓으면
 두 점 A(1, 3), B(-2, 8)은 포물선
 $f(x, y) = 0$ 경계로 서로 반대쪽에 있어야 하므로
 $f(1, 3) > 0, f(-2, 8) < 0$ 이거나
 $f(1, 3) < 0, f(-2, 8) > 0$ 이어야 한다.
 즉, $f(1, 3)$ 과 $f(-2, 8)$ 의 부호가 달라야 하므로
 $f(1, 3) \cdot f(-2, 8) < 0$
 $(1+2a-3)(4-4a-8) < 0, (2a-2)(-4a-4) < 0, (a-1)(a+1) > 0$
 $\therefore a < -1$ 또는 $a > 1$

46. 아래 그림의 어두운 부분을 부등식으로 나타내면? (단, 경계선은 포함한다.)



- ① $x(x + y - 1) \leq 0$
- ② $y(x - y + 1) \geq 0$
- ③ $xy(x - y + 1) \leq 0$
- ④ $xy(x + y - 1) \leq 0$
- ⑤ $xy(x - 1)(y - 1) \geq 0$

해설

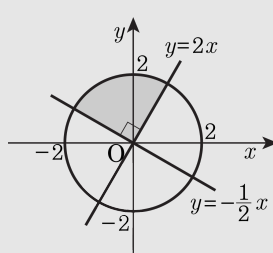
경계선이 되는 세 직선의 방정식을 구하면
 $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$ 이므로
구하는 부등식을
 $xy(x + y - 1) \square 0 \cdots \textcircled{1}$ 으로 놓는다.
이 때 어두운 부분에 속해 있는 한 점 $(-1, -1)$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(-1) \cdot (-1) \cdot (-3) = -3 < 0$ 이고
경계선을 포함하므로
 $\square$ 안에 들어갈 부등호는 $\leq$ 이다.
따라서 구하는 부등식은 $xy(x + y - 1) \leq 0$

47. 연립부등식
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y \geq -\frac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$
 이 나타내는 영역의 넓이를 구하면?

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

주어지는 연립부등식을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.
따라서, 구하는 영역의 넓이는 $4\pi \times \frac{1}{4} = \pi$



48. 세 개의 부등식 $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq -2x + 1$, $y \geq 0$ 을 동시에 만족시키는 x, y 에 대하여 $x + 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

주어진 부등식을 동시에 만족시키는 영역은 다음 빛금 진 부분과 같다.

$x + 2y = k$ 라 놓으면

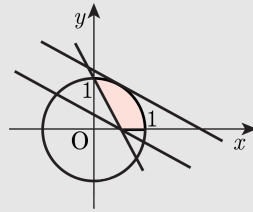
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ 이므로

점 $(\frac{1}{2}, 0)$ 을 지날 때 k 가 최소이고

직선 $x + 2y - k = 0$ 인,

원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접할 때 k 는 최대이다.

최솟값은 $k = \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}$



49. 부등식의 영역 $x^2 + y^2 - 8y + 12 \leq 0$ 위의 점 (x, y) 에 대하여 $x^2 - 6x + y^2 + 9$ 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

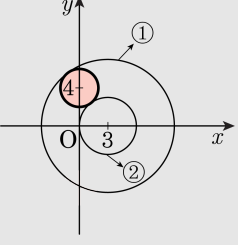
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 49

해설

$x^2 + y^2 - 8y + 12 \leq 0 \Rightarrow x^2 + (y - 4)^2 \leq 4$
 $x^2 - 6x + y^2 + 9 = k$ 라고 하면
그림처럼 ①일 때 k 가 최대
②일 때 k 가 최소가 된다.
중심사이의 거리가 5 이므로
① : $\sqrt{k} = 5 + 2 = 7$
② : $\sqrt{k} = 5 - 2 = 3$
 $\therefore$ 최댓값 : 49 최솟값 : 9

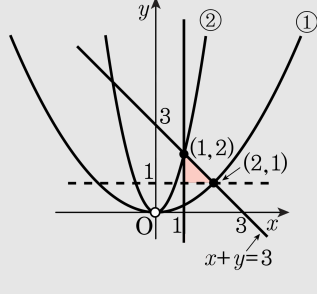


50. 연립부등식 $x \geq 1$, $y \geq 1$, $x+y \leq 3$ 을 만족시키는 실수 x , y 에 대하여 $\frac{y}{x^2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 4 ⑤ 5

해설

$\frac{y}{x^2} = k$ 라 하면 포물선 $y = kx^2 (x \neq 0)$ 은 다음 그림과 같다.



① 점 (2, 1) 을 지날 때, 최솟값 $\frac{1}{4}$ 을 갖고,

② 점 (1, 2) 를 지날 때, 최댓값 2 를 갖는다.

$$\therefore Mm = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$