

1. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?

- ① $x < -\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > -\frac{1}{\beta}$ ② $x < -\frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$
③ $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$ ④ $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$
⑤ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로
 $a < 0$ 이다. 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 이고
이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$
양변에 a 를 곱하면
 $a(x - \alpha)(x - \beta) > 0$
 $ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\alpha\beta > 0$
 $\therefore b = -a(\alpha + \beta), c = a\alpha\beta$
따라서 $cx^2 - bx + a > 0$ 에 대입하면
 $a\alpha\beta x^2 + a(\alpha + \beta)x + a > 0$
 $\alpha\beta x^2 + (\alpha + \beta)x + 1 < 0$
 $(\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0$
 $\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta} (\because 0 < \alpha < \beta)$

2. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ (x - a)(x + 2) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이 될 때, 실수 a 의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2 + 3x - 4 < 0$ 의 해가
 $-4 < x < 1$ 이므로
연립부등식의 해가 $-2 < x < 1$ 가 되려면
 $(x - a)(x + 2) > 0$ 의 해는
 $x < a, x > -2$ 이고, $a \leq -4$ 이다.

3. 두 점 A(-3, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

① (-3, 0)

② (1, 0)

③ (2, 0)

④ (-1, 0)

⑤ (5, 0)

해설

x 축 위의 점을 P(x, 0)라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, P(2, 0)

4. 두 점 $A(a, b)$, $B(-3, 4)$ 를 3 : 1로 외분하는 점을 $P(2, -1)$ 이라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$P\left(\frac{3 \cdot (-3) - 1 \cdot a}{3 - 1}, \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot b}{3 - 1}\right) = P(2, -1) \text{ 이므로,}$$

$$\frac{3 \cdot (-3) - 1 \cdot a}{3 - 1} = 2, -9 - a = 4, a = -13$$

$$\frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot b}{3 - 1} = -1, 12 - b = -2, b = 14$$

$$\therefore a + b = 1$$

6. 두 직선 $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$ 의 교점을 지나고 $(0, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax + by = 0$ 이라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x - y - 3) + k(x + y - 3) = 0$ 으로 나타낼 수 있다.

이 때, $(0, 0)$ 을 지나므로

$$(-3) + k(-3) = 0 \quad \therefore k = -1$$

$(2x - y - 3) + (-1)(x + y - 3) = 0$ 을 정리하면

$$\therefore x - 2y = 0$$

$$a = 1, b = -2 \quad \therefore a - b = 1 - (-2) = 3$$

7. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} < m < 1$

② $-\frac{1}{3} < m < 1$

③ $-1 < m < 2$

④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$

⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

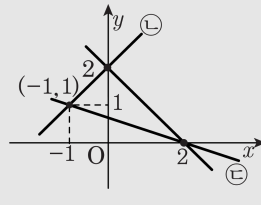
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{1}$ 의 기울기 m

은

$$\textcircled{L} \text{의 기울기 } \frac{2-1}{0-(-1)} = 1 \text{ 보다 작고}$$

$$\textcircled{\ominus} \text{의 기울기 } \frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3} \text{ 보다 커야한다.}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$



8. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 (a, b) 와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

(a, b) 가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점 (a, b) 와 직선 사이의 거리를 l 이라 하면,

$$a = b^2 + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$l = \frac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \dots\dots \textcircled{2}$$

①를 ②에 대입하면

$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore b = \frac{1}{2}$ 일 때 l 이 최소가 된다.

따라서 $a + b = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ 이므로

$$\therefore 4(a + b) = 7$$

9. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

10. x 축에 접하고 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

- ① $(x - 3)^2 + (y - 12)^2 = 169$
- ② $x^2 + (y - 5)^2 = 169$
- ③ $x^2 + (y - 5)^2 = 25$
- ④ $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 169$
- ⑤ $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 25$

해설

구하는 원의 중심을 (a, b) 라고 하면
 x 축에 접하는 원의 방정식은
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$
이 원이 두 점 $(3, 1)$, $(-4, 8)$ 을 지나므로
 $(3 - a)^2 + (1 - b)^2 = b^2 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $(-4 - a)^2 + (8 - b)^2 = b^2 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서
 $b = a + 5 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면
 $a^2 - 8a = a(a - 8) = 0$
 $\therefore a = 0$ 또는 $a = 8$
 $\textcircled{㉢}$ 에서 $a = 0$ 일 때 $b = 5$, $a = 8$ 일 때 $b = 13$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2 + (y - 5)^2 = 5^2$
또는 $(x - 8)^2 + (y - 13)^2 = 13^2$

11. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 에 의하여 점 $(-4, 8)$ 은 점 (a, b) 로 옮겨진다. 이때 $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$ 이므로
 $(-4, 8) \rightarrow (-4 + 2, 8 - 1) = (-2, 7)$
 $\therefore a + b = 5$

12. 점 A $(-2, 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 할 때, 두 점 B, C 를 지나는 직선의 방정식은?

① $y = 2x - 3$

② $y = 2x - 5$

③ $y = x - 1$

④ $y = x - 3$

⑤ $y = x - 5$

해설

점 A $(-2, 3)$ 을 원점에 대하여
대칭이동한 점 B 의 좌표는 $(2, -3)$ 이고,
점 A $(-2, 3)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동한 점 C 의 좌표는 $(3, -2)$ 이다.
따라서, 두 점 B $(2, -3)$, C $(3, -2)$ 를 지나는
직선의 방정식은

$$y + 3 = \frac{-2 + 3}{3 - 2}(x - 2), y + 3 = x - 2$$

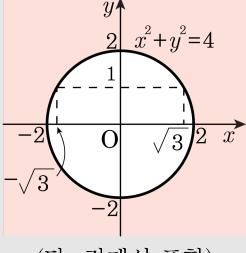
$$\therefore y = x - 5$$

13. 점 $(k, 1)$ 이 부등식 $x^2 + y^2 \geq 4$ 의 영역에 포함되지 않도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $k > -\sqrt{3}$
- ② $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$
- ③ $k > \sqrt{3}$
- ④ $-2 < k < 0$
- ⑤ $0 < k < 2$

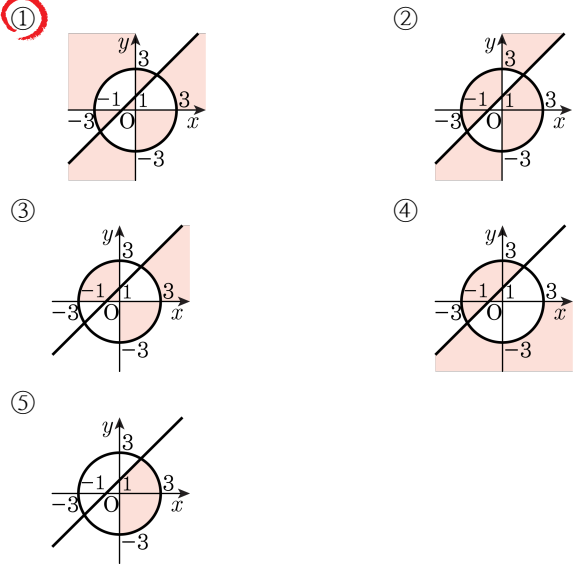
해설

부등식 $x^2 + y^2 \geq 4$ 의 영역은 $x^2 + y^2 = 4$ 의 경계를 포함한 외부이다.
그런데 점 $(k, 1)$ 이 이 영역에 포함되지 않으려면 원의 내부에 있어야 하므로
 $k^2 + 1 < 4, k^2 < 3$
 $\therefore -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$



(단, 경계선 포함)

14. 부등식의 영역 $xy(x - y + 1)(x^2 + y^2 - 9) > 0$ 을 만족하는 (x, y) 의 영역을 그림으로 옳게 나타낸 것은?



해설

경계선 위에 있지 않은 임의의 점을 부등식 $xy(x - y + 1)(x^2 + y^2 - 9) > 0$ 에 대입해보면 구하는 영역은 ①번과 같다.

15. 다음 그림이 나타내는 부등식을 바르게 구한 것은?

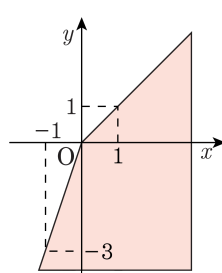
① $y < x - |x|$

② $y < 2x - |x|$

③ $y < x - |2x|$

④ $y < \frac{x}{2} - |x|$

⑤ $y < 2x - \left| \frac{2}{x} \right|$



해설

$$y = 2x - |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0 \text{일때}) \\ 3x & (x < 0 \text{일때}) \end{cases} \quad \text{단, 경계선은 제외한다.}$$

16. 부등식 $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right| \leq 1$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하면?

- ① 13개 ② 9개 ③ 6개 ④ 4개 ⑤ 2개

해설

$$-1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x \leq 1$$

$$-6 \leq 3 - 2x \leq 6$$

$$-9 \leq -2x \leq 3$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

그런데 x 는 자연수 이므로 1, 2, 3, 4이다.

17. 부등식 $[x]^2 \geq [x+2]$ 를 풀면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $x \leq 0$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq 0$ 또는 $x > 2$

③ $x < 0$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 0$ 또는 $x \geq 1$

⑤ $x < 1$ 또는 $x \geq 3$

해설

$$\begin{aligned} [x]^2 &\geq [x+2] \text{ 에서 } [x]^2 \geq [x] + 2 \\ [x]^2 - [x] - 2 &\geq 0, ([x] - 2)([x] + 1) \geq 0 \\ \therefore [x] &\leq -1 \text{ 또는 } [x] \geq 2 \\ \therefore x &< 0 \text{ 또는 } x \geq 2 \end{aligned}$$

18. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \leq 5$ 이 되도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x - 5) \leq 0$

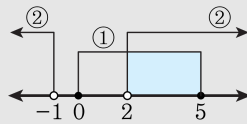
$\therefore 0 \leq x \leq 5 \dots\dots ①$

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \dots\dots ②$

①, ②를 동시에 만족하는 해가

$2 < x \leq 5$ 이므로 a 의 값은 2이다.



19. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

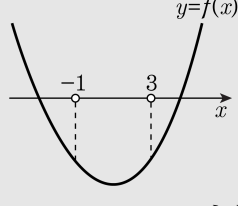
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -3$

(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$

$\therefore k \leq -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

20. 좌표평면에 두 점 A(1, 3), B(2, -1) 이 있다. 점 C(m, 2) 에 대하여 $\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소일 때의 m 의 값을 구하면?

- ① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\overline{AC} + \overline{BC}$ 가 최소인 경우는

세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때이므로

직선 AB 와 BC 의 기울기가 같다.

$$\text{따라서 } \frac{-1-3}{2-1} = \frac{2-(-1)}{m-2}$$

$$\therefore m = \frac{5}{4}$$

21. 다음 <보기>는 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + y + k = 0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

- ㉠ $k < \frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
- ㉡ $k = -\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
- ㉢ $k < 4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
- ㉤ $k = \frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
- ㉥ $k < \frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,
 $(x-1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - k$ 이다.
 $y=0$ 을 대입 후 정리하면, $(x-1)^2 = 1-k$
 $\Rightarrow k < 1$ 일 때 두 점에서 만난다.
㉡ $x=0$ 를 대입 후 정리하면,
 $(y+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - k$
 $\therefore k = \frac{1}{4}$ 일 때 접한다.
㉤ 중심이 $y=x$ 위에 있지 않으므로
 x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.
 $\therefore$ (㉠, ㉡, ㉤) 가 참이다.

22. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심
사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

23. 두 원 $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ 의 두 교점과 점(1, 0)을 지나는 원의

방정식을 바르게 구한 것은?

① $x^2 + y^2 - 8x - y - 4 = 0$

② $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 5x - y + 16 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 5x - 4y + 16 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$

해설

문제에서 주어진 두 원의 교점을

지나는 임의의 원

또는 직선의 방정식은

$(x^2 + y^2 - 4x)m + (x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$ 이다.

위 방정식이 나타내는 원이 점 (1,0) 을 지나므로

$x = 1$, $y = 0$ 을 대입하면

$$-3m + 3 = 0$$

$$\therefore m = 1$$

$$(x^2 + y^2 - 4x) + (x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8) = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 10x - 2y + 8 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$$

24. 직선 $y = mx + 3$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 와 서로 만나지 않을 때, m 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$

③ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

④ $m \leq -2\sqrt{2}, m \geq 2\sqrt{2}$

⑤ $m < -3\sqrt{2}, m > 3\sqrt{2}$

해설

원과 직선이 서로 만나지 않으려면 원의 중심부터 직선까지 거리가 반지름보다 커야 한다.

$$\therefore \frac{|m \times 0 + (-1) \times 0 + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 1$$

$$\Rightarrow m^2 + 1 < 9$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

25. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6)에 대하여 삼각형 OAB의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$