1. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\frac{a-7}{2}$ 또는 $x>\frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\frac{a-7}{2}=-1$, $\frac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

2. 이차부등식 $x^2-6x+9\le 0$ 의 해를 구하면?

① $x\ge 3$ 또는 $x\le -3$
② x는 모든 실수
③ $x\ne 3$인 모든 실수
④ $x=3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2-6x+9\le 0$
$(x-3)^2\le 0$
$\Rightarrow x=3$

3. 부등식 $-x^2 - kx + k < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $a < k < \beta$이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$x^2 + kx - k > 0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,
판별식이 0보다 작아야 한다
$D = k^2 + 4k < 0$에서
$k(k+4) < 0$, $-4 < k < 0$,
$\alpha = -4$, $\beta = 0$
$\therefore \ \alpha + \beta = -4$

4. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2b+a)$, $\mathrm{B}(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2}$$
$$= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}$$
$$\therefore\ a^2+b^2=5$$

5. A $(4, 7)$, B $(3, 2)$, C $(5, 3)$, D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y - x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$\therefore \quad x + 3 = 9, y + 2 = 10$

$\therefore \quad x = 6, y = 8$

6. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(5, b)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 세 변 AB, BC, CA 를 $2:1$ 로 외분하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$ 이 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

세 변 AB, BC, CA 를 $2:1$ 로 외분하는 점

D, E, F 의 좌표를 각각 구하면

$$\mathrm{D}\left(\frac{2\times(-1)-1\times \mathrm{a}}{2-1}, \frac{2\times 0-1\times 2}{2-1}\right)$$

$= \mathrm{D}(-\mathrm{a}-2, -2)$

$$\mathrm{E}\left(\frac{2\times 5-1\times(-1)}{2-1}, \frac{2\times \mathrm{b}-1\times 0}{2-1}\right)$$

$= \mathrm{E}(11, 2\mathrm{b})$

$$\mathrm{F}\left(\frac{2\times \mathrm{a}-1\times 5}{2-1}, \frac{2\times 2-1\times \mathrm{b}}{2-1}\right)$$

$= \mathrm{F}(2\mathrm{a}-5, 4-\mathrm{b})$ 이므로

$\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-a-2+11+2a-5}{3}, \frac{-2+2b+4-b}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$$

이때, $\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심의 좌표가

$(2, 1)$ 이므로

$$\frac{a+4}{3}=2, \ \frac{b+2}{3}=1$$

$\therefore a=2, b=1 \therefore a+b=3$

(다른 풀이) 일반적으로 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심과

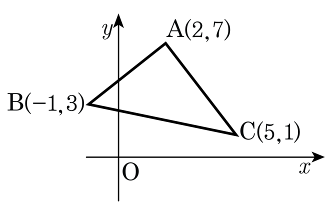
$\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CA}}$ 를 $m:n$ 으로 외분하는 점

(내분하는 점) 을 이은 삼각형의 무게중심은 일치한다.

즉, $\left(\frac{a-1+5}{3}, \frac{2+0+b}{3}\right)=(2, 1)$

$\therefore a=2, b=1$

7. 세 점 $A(2,\ 7)$, $B(-1\ ,3)$, $C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x-y-2=0$　② $x+y-2=0$　③ $x-2=0$

④ $3x-y+1=0$　⑤ $4x+y-1=0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{BC}$의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x=2$ 이다.

8. 세 점 A $(2,\ 1)$, B $(-k+1,\ 3)$, C $(1,\ k+2)$가 같은 직선위에 있도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-\mathrm{k}+1,3)$, $\mathrm{C}(1,\mathrm{k}+2)$ 가 같은 직선 위에 있으려면
직선 AB 와 AC 의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3-1}{(-k+1)-2}=\frac{(k+2)-1}{1-2}$$

$$\frac{2}{-k-1}=\frac{k+1}{-1},$$

$(k+1)^2=2$,

$\therefore\ k=-1\pm\sqrt{2}$ 따라서 구하는 합은 $(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

9. 좌표평면 위에 세 점 A(−2, 1), B(4, 7), C(6, 3)을 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 △ABC의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x + 2) + 1$은 m의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 △ABC의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$의 중점 M(5, 5)를 지나야 한다.
$\therefore\ 5 = m(5 + 2) + 1$
$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

10. 두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2,-1)$, $(4,3)$ 을 지나는 직선은

$y+1=\dfrac{3-(-1)}{4-2}(x-2)$

$\therefore 2x-y-5=0$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$\dfrac{|2\times0-0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

11. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$ ② $x^2+y^2+x+2y+2=0$

③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$ ④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

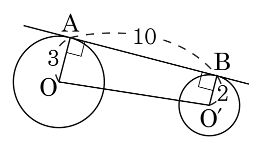
② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

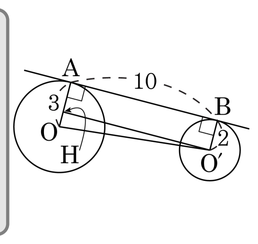
12. 다음 그림의 두 원 O, O′ 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



① $\sqrt{101}$ ② $\sqrt{103}$ ③ $\sqrt{105}$ ④ $\sqrt{106}$ ⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O′ 에서 선분 AO 에 내린 수선의 발을 H 라 하면,
직각삼각형 OO′H 에서
$\overline{OO'} = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



13. 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-1)$ 에 의하여 점$(-4,\ 8)$ 은 점$(a,\ b)$ 로 옮겨진다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

평행이동 f 는 x 축의 방향으로 $+2$, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 변환이므로 $(-4+2,\ 8-1) = (a,\ b)$ 따라서 $a=-2,\ b=7$

14. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

① $y = -3x - 2$ ② $y = 3x + 2$ ③ $y = -3x + 2$
④ $y = -3x + 4$ ⑤ $y = 3x - 4$

해설
직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은
$y - (-2) = -3x$
$\therefore y = -3x - 2$

15. 부등식 $y \leq -x^2 + 4$를 만족시키는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3 개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y = -x^2 + 4$의 경계를 포함한 아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 중 x, y가 모두 양의 정수인 것은

(i) $x = 1$일 때

$y \leq -1^2 + 4 = 3$이므로 $y = 1, 2, 3$

(ii) $x = 2$일 때

$y \leq -2^2 + 4 = 0$

즉, 양의 정수 y는 존재하지 않는다.

따라서 x, y가 모두 양의 정수인 순서쌍 (x, y)는 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$의 3개이다.

16. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

17. 세 꼭지점이 A$(-2, 1)$, B$(2,\ 3)$, C$(3, -2)$로 주어지는 삼각형의 외심의 좌표는?

① $\left(\frac{2}{11},\ \frac{2}{11}\right)$ ② $\left(\frac{10}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ③ $\left(1,\ \frac{2}{11}\right)$
④ $\left(\frac{10}{11},\ \frac{12}{11}\right)$ ⑤ $\left(\frac{10}{11},\ \frac{2}{11}\right)$

해설

외심이란 세변의 수직이등분선의 교점이므로 세 변 중 두변의 수직이등분선의 교점도 삼각형의 외심이다. 우선, 선분 AB 중점의 좌표를 구하면 $(0,\ 2)$이고, 직선 AB 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -2

$\therefore$ 기울기가 -2이고, 중점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y = -2x + 2 \cdots$ ㉠

선분 AC 중점의 좌표를 구하면 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$이고, 직선 AC의 기울기가 $-\frac{3}{5}$이므로 선분 AC 수직이등분선의 기울기는 $\frac{5}{3}$

$\therefore$ 기울기가 $\frac{5}{3}$이고, 중점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식은 $y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면, $x = \frac{10}{11}$, $y = \frac{2}{11}$

따라서 외심의 좌표 : $\left(\frac{10}{11},\ \frac{2}{11}\right)$

18. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12일 때, ab 의 값은? (단, $a>0$, $b>0$)

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 에서 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$ 이므로 x 절편은 $2a$, y 절편은 $2b$ 이다.
이 때, a, b 가 양수이므로
직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=2ab=12$
$\therefore\ ab=6$

19. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $A(-1,\ 0)$ $B(3,\ 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0,\ 3),\ r = 10$　　② $(0,\ 3),\ r = \sqrt{10}$

③ $(0,\ 2),\ r = 10$　　④ $(0,\ 2),\ r = \sqrt{10}$

⑤ $(0,\ -3),\ r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은
$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \cdots$ ① 이다.
$(-1, 0)$ 을 $(3, 2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,
$a^2 = r^2 - 1 \quad \cdots$ ②
$(a-2)^2 = r^2 - 9 \quad \cdots$ ③
③ 을 ② 에 대입하면,
$a^2 = (a-2)^2 + 8$
$\Rightarrow \quad a = 3 \quad r = \sqrt{10}$
$\therefore$ 중심은 $(0,\ 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

20. 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + y^2 = 4$
② $(x-4)^2 + y^2 = 8$
③ $(x-6)^2 + y^2 = 12$
④ $(x-8)^2 + y^2 = 16$
⑤ $(x-10)^2 + y^2 = 20$

해설

조건을 만족하는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 라고 하면

$\overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{x^2+y^2},\ \overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{(x-6)^2+y^2}$

이때, $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$ 에서 $\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+y^2-16x+48=0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$(x-8)^2+y^2=16$

21. 점 A(4, 0)과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{\pi}{3}$　④ $\frac{\pi}{4}$　⑤ π

해설

$x^2+y^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면
$A(4,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는
$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+4}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$
$\therefore\ \ a=2x-4,\ b=2y$
이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$가 성립한다.
$(2x-4)^2+(2y)^2=4, (x-2)^2+y^2=1$
따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2,0)$,
반지름의 길이가 1 인 원이므로
원이 넓이 S 는 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$

22. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

23. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

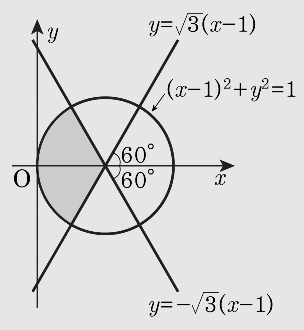
$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

24. 세 부등식 $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, $y \geq \sqrt{3}(x-1)$, $y \leq -\sqrt{3}(x-1)$ 동시에 만족하는 부분의 넓이는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

해설

다음 그림에서 빗금 친 부분의 면적이므로
$\pi \times \frac{120}{360} = \frac{1}{3}\pi$

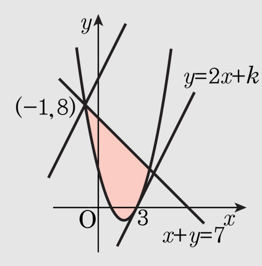


25. $y \geq x^2 - 4x + 3,\ x + y \leq 7$에서 $2x - y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M - m$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설



주어진 부등식은 그림과 같다.

$2x - y = k$ 라 놓으면

$y = 2x - k$ 이고

$y = x^2 - 4x + 3$과

$x + y = 7$을 연립하여 교점을 구하면

$x = -1,\ y = 8$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

그림에서와 같이 $y = 2x - k$가 점 $(-1,\ 8)$을 지날 때

최솟값 $m = -2 - 8 = -10$

또한, $y = 2x - k$ 가 $y = x^2 - 4x + 3$에 접할 때,

$x^2 - 4x + 3 = 2x - k$ 에서 $x^2 - 6x + 3 + k = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - (3 + k) = 0$

$M = 6$ (최댓값)

$\therefore\ M - m = 6 - (-10) = 16$