1. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\frac{a-7}{2}$ 또는 $x>\frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\frac{a-7}{2}=-1$, $\frac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

2. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \le 0$의 해를 구하면?

① $x \ge 3$ 또는 $x \le -3$

② x는 모든 실수

③ $x \ne 3$인 모든 실수

④ $x = 3$

⑤ 해가 없다

해설

$x^2 - 6x + 9 \le 0$

$(x-3)^2 \le 0$

$\Rightarrow x = 3$

3. 부등식 $-x^2-kx+k<0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 k의 범위를 정하면 $\alpha<k<\beta$이다. 이 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2+kx-k>0$이 모든 x에 대해서 성립하려면,

판별식이 0보다 작아야 한다

$D=k^2+4k<0$에서

$k(k+4)<0$, $-4<k<0$,

$\alpha=-4$, $\beta=0$

$\therefore\ \alpha+\beta=-4$

4. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2b+a)$, $\mathrm{B}(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2}\\ &= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

5. A $(4, 7)$, B $(3, 2)$, C $(5, 3)$, D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y - x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$\therefore \quad x + 3 = 9,\ y + 2 = 10$

$\therefore \quad x = 6,\ y = 8$

6. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(5, b)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 세 변 AB, BC, CA 를 $2:1$ 로 외분하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심의 좌표가 $(2, 1)$ 이 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 변 AB, BC, CA 를 $2:1$ 로 외분하는 점
D, E, F 의 좌표를 각각 구하면

$$\mathrm{D}\left(\frac{2\times(-1)-1\times \mathrm{a}}{2-1}, \frac{2\times 0-1\times 2}{2-1}\right)$$

$= \mathrm{D}(-\mathrm{a}-2, -2)$

$$\mathrm{E}\left(\frac{2\times 5-1\times(-1)}{2-1}, \frac{2\times \mathrm{b}-1\times 0}{2-1}\right)$$

$= \mathrm{E}(11, 2\mathrm{b})$

$$\mathrm{F}\left(\frac{2\times \mathrm{a}-1\times 5}{2-1}, \frac{2\times 2-1\times \mathrm{b}}{2-1}\right)$$

$= \mathrm{F}(2\mathrm{a}-5, 4-\mathrm{b})$ 이므로
$\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-a-2+11+2a-5}{3}, \frac{-2+2b+4-b}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+2}{3}\right)$$

이때, $\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심의 좌표가
$(2, 1)$ 이므로

$$\frac{a+4}{3} = 2\ , \ \frac{b+2}{3} = 1$$

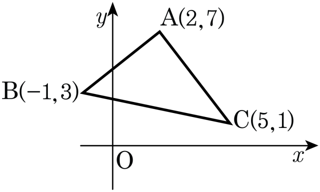
$\therefore a = 2, b = 1 \ \therefore a+b = 3$

(다른 풀이) 일반적으로 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심과
$\overline{\mathrm{AB}}, \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{CA}}$ 를 $m:n$ 으로 외분하는 점
(내분하는 점) 을 이은 삼각형의 무게중심은 일치한다.

즉, $\left(\frac{a-1+5}{3}, \frac{2+0+b}{3}\right) = (2, 1)$

$\therefore a = 2, b = 1$

7. 세 점 $A(2,\ 7), B(-1\ ,3), C(5,\ 1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



① $x - y - 2 = 0$ ② $x + y - 2 = 0$ ③ $x - 2 = 0$

④ $3x - y + 1 = 0$ ⑤ $4x + y - 1 = 0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로
점A와 $\overline{BC}$의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.
$\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점$(2,\ 7)$ 과$(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

8. 세 점 $A\,(2,\ 1)$, $B\,(-k+1,\ 3)$, $C\,(1,\ k+2)$가 같은 직선위에 있도록 하는 실수 k의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 점 $A(2,1)$, $B(-k+1,3)$, $C(1,k+2)$ 가 같은 직선 위에 있으려면

직선 AB 와 AC 의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3-1}{(-k+1)-2} = \frac{(k+2)-1}{1-2}$$

$$\frac{2}{-k-1} = \frac{k+1}{-1},$$

$(k+1)^2 = 2$,

$\therefore\ k = -1 \pm \sqrt{2}$ 따라서 구하는 합은 $(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2}) = -2$

9. 좌표평면 위에 세 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ 7)$, C$(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$에 의하여 $\triangle$ABC의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x+2)+1$은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle$ABC 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점 M$(5, 5)$를 지나야 한다.

$\therefore\ 5 = m(5+2)+1$

$\therefore\ m = \frac{4}{7}$

10. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$$y + 1 = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$$

$\therefore 2x - y - 5 = 0$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

11. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 않은 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$

② $x^2+y^2+x+2y+2=0$

③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$

④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

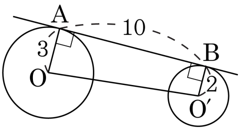
② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

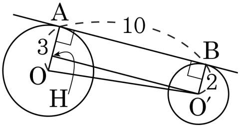
12. 다음 그림의 두 원 O, O′ 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



① $\sqrt{101}$ ② $\sqrt{103}$ ③ $\sqrt{105}$ ④ $\sqrt{106}$ ⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O′ 에서 선분 AO 에 내린 수선의 발을 H 라 하면, 직각삼각형 OO′H 에서
$\overline{OO'} = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



13. 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-1)$에 의하여 점$(-4,\ 8)$은 점$(a,\ b)$로 옮겨진다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+2$, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 변환이므로 $(-4+2,\ 8-1) = (a,\ b)$ 따라서 $a=-2,\ b=7$

14. 다음 중 직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로 2 만큼 평행이동시킨 직선의 식은?

① $y = -3x - 2$　② $y = 3x + 2$　③ $y = -3x + 2$

④ $y = -3x + 4$　⑤ $y = 3x - 4$

해설

직선 $y = -3x$ 의 그래프를 y 축의 음의 방향으로
2 만큼 평행이동 시킨 직선은

$y - (-2) = -3x$

$\therefore y = -3x - 2$

15. 부등식 $y \leq -x^2+4$를 만족시키는 양의 정수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

부등식이 나타내는 영역은 포물선 $y=-x^2+4$의 경계를 포함한 아랫부분으로 이 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 중 x, y가 모두 양의 정수인 것은

(i) $x=1$일 때

$y \leq -1^2+4=3$이므로 $y=1,\ 2,\ 3$

(ii) $x=2$일 때

$y \leq -2^2+4=0$

즉, 양의 정수 y는 존재하지 않는다.

따라서 x, y가 모두 양의 정수인 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$의 3개이다.

16. $-2 \le x \le -1$일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$이다. 이 때, pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$의 각 변에 -1을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

17. 세 꼭지점이 $A(-2, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, -2)$로 주어지는 삼각형의 외심의 좌표는?

① $\left(\frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right)$ ② $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ③ $\left(1, \frac{2}{11}\right)$
④ $\left(\frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right)$ ⑤ $\left(\frac{10}{11}, \frac{2}{11}\right)$

해설

외심이란 세변의 수직이등분선의 교점이므로 세 변 중 두변의 수직이등분선의 교점도 삼각형의 외심이다. 우선, 선분 AB 중점의 좌표를 구하면 $(0, 2)$이고, 직선 AB 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -2

$\therefore$ 기울기가 -2이고, 중점 $(0, 2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y = -2x + 2 \cdots$ ㉠

선분 AC 중점의 좌표를 구하면 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$이고, 직선 AC의 기울기가 $-\frac{3}{5}$이므로 선분 AC 수직이등분선의 기울기는 $\frac{5}{3}$

$\therefore$ 기울기가 $\frac{5}{3}$이고, 중점 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$를 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면, $x = \frac{10}{11}$, $y = \frac{2}{11}$

따라서 외심의 좌표 : $\left(\frac{10}{11}, \frac{2}{11}\right)$

18. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 12 일 때, ab 의 값은? (단, $a>0,\ b>0$)

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 에서 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$ 이므로 x 절편은 $2a$, y 절편은 $2b$ 이다.

이 때, $a,\ b$ 가 양수이므로

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2a\times 2b=2ab=12$

$\therefore\ ab=6$

19. 중심이 y 축 위에 있고, 두 점 $A(-1,\ 0)$ $B(3,\ 2)$ 를 지나는 원의 중심과 반지름의 길이 r 을 구하면?

① $(0,\ 3),\ r = 10$

② $(0,\ 3),\ r = \sqrt{10}$

③ $(0,\ 2),\ r = 10$

④ $(0,\ 2),\ r = \sqrt{10}$

⑤ $(0,\ -3),\ r = 10$

해설

중심이 y 축에 있는 원의 방정식은
$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \cdots$ ① 이다.
$(-1,0)$ 을 $(3,2)$ 를 ① 에 각각 대입하면,
$a^2 = r^2 - 1 \quad \cdots$ ②
$(a-2)^2 = r^2 - 9 \quad \cdots$ ③
③ 을 ② 에 대입하면,
$a^2 = (a-2)^2 + 8$
$\Rightarrow \quad a = 3 \quad r = \sqrt{10}$
$\therefore$ 중심은 $(0,\ 3)$, 반지름은 $\sqrt{10}$ 이다.

20. 두 점 A(0, 0), B(6, 0) 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + y^2 = 4$

② $(x-4)^2 + y^2 = 8$

③ $(x-6)^2 + y^2 = 12$

④ $(x-8)^2 + y^2 = 16$

⑤ $(x-10)^2 + y^2 = 20$

해설

조건을 만족하는 점을 P(x, y) 라고 하면

$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\overline{BP} = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}$

이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 에서 $\overline{AP} = 2\overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$(x-8)^2 + y^2 = 16$

21. 점 A(4, 0)과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ π

해설

$x^2+y^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면

$A(4,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는

$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.

$\therefore\ x=\frac{a+4}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$

$\therefore\ \ a=2x-4,\ b=2y$

이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$가 성립한다.

$(2x-4)^2+(2y)^2=4, (x-2)^2+y^2=1$

따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2,0)$,

반지름의 길이가 1인 원이므로

원이 넓이 S는 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$

22. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

23. 원 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 과 함수 $y=\dfrac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\dfrac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\dfrac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\dfrac{9}{4x^2}=\dfrac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ \ x=\pm 1,\ \ \pm\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}\times 4=9$

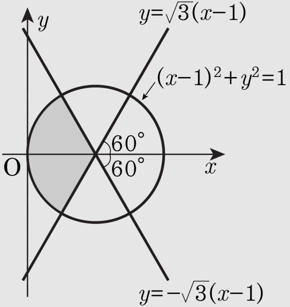
24. 세 부등식 $(x-1)^2+y^2 \le 1$, $y \ge \sqrt{3}(x-1)$, $y \le -\sqrt{3}(x-1)$ 동시에 만족하는 부분의 넓이는?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}$

해설

다음 그림에서 빗금 친 부분의 면적이므로

$$\pi \times \frac{120}{360} = \frac{1}{3}\pi$$

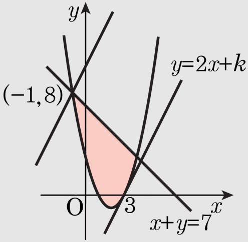


25. $y \geq x^2 - 4x + 3$, $x + y \leq 7$에서 $2x - y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M - m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



주어진 부등식은 그림과 같다.

$2x - y = k$ 라 놓으면

$y = 2x - k$ 이고

$y = x^2 - 4x + 3$과

$x + y = 7$을 연립하여 교점을 구하면

$x = -1,\ y = 8$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

그림에서와 같이 $y = 2x - k$가 점 $(-1,\ 8)$을 지날 때

최솟값 $m = -2 - 8 = -10$

또한, $y = 2x - k$ 가 $y = x^2 - 4x + 3$에 접할 때,

$x^2 - 4x + 3 = 2x - k$ 에서 $x^2 - 6x + 3 + k = 0$

$\dfrac{D}{4} = 9 - (3 + k) = 0$

$M = 6$ (최댓값)

$\therefore\ M - m = 6 - (-10) = 16$