

5. 한 상자에 빨강, 파랑, 흰색의 구슬이 들어 있다. 파란 구슬의 개수는 흰 구슬의 개수의 $\frac{1}{2}$ 보다 크거나 같고, 빨간 구슬의 개수의 $\frac{1}{3}$ 보다 작거나 같다. 한편, 흰 구슬과 파란 구슬의 개수의 합은 55보다 크거나 같다. 이때, 빨간 구슬의 개수의 최솟값을 구하면?

① 57 ② 58 ③ 59 ④ 60 ⑤ 61

해설

빨간 구슬의 개수를 a 개, 파란 구슬의 개수를 b 개, 흰색 구슬의 개수를 c 개라 하면,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a \geq b \geq \frac{1}{2}c \cdots \textcircled{1} \\ b + c \geq 55 \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 자연수})$$

$$\begin{array}{r} b + c \geq 55 \\ -) \quad b - \frac{1}{2}c \geq 0 \\ \hline \frac{3}{2}c \geq 55 \end{array}$$

$$c \geq \frac{2}{3} \times 55 = 36.6 \cdots \quad \therefore c \geq 37$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b \geq \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \times 37 = 18.5 \quad \therefore b \geq 19$$

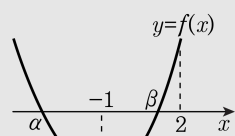
$$\frac{1}{3}a \geq 19 \quad \therefore a \geq 57$$

6. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $-2 < a < 0$ ② $-2 < a < 1$ ③ $0 < a < 2$
 ④ $1 < a < 2$ ⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1 - 2a + a^2 - 1 < 0$ 에서 $a^2 - 2a < 0$, $a(a-2) < 0$
 $\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0$, $(a+3)(a+1) > 0$
 $\therefore a < -3$, $a > -1$

(i), (ii)에서 $0 < a < 2$

7. 점 A(6, 2)와 직선 $x + 2y - 2 = 0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x - 2y - 8 = 0$ ② $x + 2y - 8 = 0$ ③ $x - 2y + 8 = 0$
④ $x + 2y + 8 = 0$ ⑤ $x - 2y = 0$

해설

P (a , b)라 하면 $a + 2b - 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x , y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a+18}{1+3}, \frac{b+6}{1+3} \right)$$

$$x = \frac{a+18}{1+3}, y = \frac{b+6}{1+3}$$

$$a = 4x - 18, b = 4y - 6$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면,

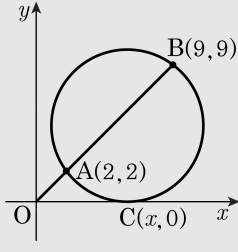
$$4x - 18 + 2(4y - 6) - 2 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

8. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{9}{2}$
- ② 5
- ③ $\frac{11}{2}$
- ④ 6
- ⑤ $\frac{13}{2}$

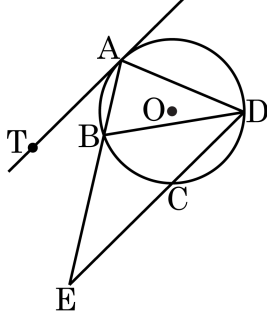
해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$

9. 네 개의 점 A, B, C, D가 한 원 O 위에 있고, 직선 AT는 원 O의 접선이며, $\overline{CD} \parallel \overline{TA}$ 이다. 또, 점 E는 직선 CD와 AB가 만나는 점일 때, $\overline{AD}$ 의 길이는? (단, $\overline{AB} = 3, \overline{BE} = 6$)



- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

현 AB에 대하여 $\angle BAT = \angle BDA$
 또한, $\overline{ED} \parallel \overline{TA}$ 이므로
 $\angle DEA = \angle EAT$ 이다.
 $\therefore \angle DEA = \angle BDA$ ($\because$ 접선과 현이 이루는 각과 원주각은 같다.)
 따라서 $\triangle EAD \sim \triangle DAB$ (AA 닮음)이므로
 $\overline{AE} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AB}$, $9 : x = x : 3$
 $\therefore x^2 = 27$ $\therefore x = 3\sqrt{3}$ ($\because x > 0$)

10. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선의 y 절편은?

① $\pm \sqrt{2}$

② $\pm \sqrt{3}$

③ $\pm \sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{3}$

⑤ $\pm 2\sqrt{5}$

해설

직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2

원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 기울기가 -2 인

직선의 방정식은 $y = -2x \pm 2\sqrt{(-2)^2 + 1}$

$\therefore y = -2x \pm 2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 $\pm 2\sqrt{5}$