

1. $\frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{1024}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2^{-11} + 2^{-12} + \dots + 2^{-20}}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= \frac{2^{-10}(2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10})}{2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-10}} \\ &= 2^{-10} = \frac{1}{1024} \end{aligned}$$

2. 자연수 x 에 대하여 $\frac{7x}{60}$ 은 유한소수이고, $7x \leq 100$ 이다. 이것을 만족하는 x 들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\frac{7x}{60} = \frac{7x}{2^2 \times 3 \times 5}$ 이므로 x 는 3 의 배수이어야 한다.

분자인 $7x$ 는 100 이하의 자연수이므로

조건에 맞는 x 값은 3, 6, 9, 12 이다.

따라서 x 값들의 합은 30 이다.

3. $1 < x < 60$ 인 자연수 x 에 대하여, $\frac{5}{x}$ 가 무한소수일 때, 이를 만족하는 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$\frac{5}{x}$ 가 유한소수가 되려면 $\frac{5}{2^a \times 5^b}$ 의 꼴이어야 하므로

$\frac{5}{2^a}$ 의 꼴이 되는 분수는 $a = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때의 5개

$\frac{5}{2^a \times 5}$ 의 꼴이 되는 분수는 $a = 1, 2, 3$ 일 때의 3개

$\frac{5}{2^a \times 5^2}$ 의 꼴이 되는 분수는 $a = 1$ 일 때의 1개

$\frac{5}{5^b}$ 의 꼴이 되는 분수는 $b = 1, 2$ 일 때의 2개

따라서 유한소수는 $5 + 3 + 1 + 2 = 11$ (개)이므로 유한소수가 아닌 무한소수의 개수는

$58 - 11 = 47$ (개)

4. $\frac{a}{2^2 \times 3 \times 5}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이다. a 가 10 미만인 홀수일 때, $a + b$ 의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

해설

$\frac{a}{2^2 \times 3 \times 5}$ 를 소수로 나타낼 때, 유한소수가 되려면 분모에 있는 3이 약분되어야 하므로 a 의 값은 3의 배수가 되어야 한다. 그리고 a 가 10 미만의 홀수이므로 a 는 3 또는 9이다. 그런데 이 식을 기약분수로 고치면 $\frac{3}{b}$ 이어야 하므로 $a = 9$ 이다.

$$\text{또한 } \frac{9}{60} = \frac{3^2}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3}{20}$$

$$\therefore b = 20$$

$$\therefore a + b = 9 + 20 = 29$$

5. 분수 $\frac{x}{84}$ 를 소수로 고치면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{3}{y}$ 이 된다고 한다. 이때, $x+y$ 값을 구하여라. (단, $y \neq 1$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

▷ 정답 : 128

해설

$$\frac{x}{84} = \frac{x}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{y} \Rightarrow x \text{ 는 } 3 \times 7 \times 3 \text{ 의 배수}$$

$x = 63$ 일 때 $y = 4$, $x = 126$ 일 때, $y = 2$ 이다.

$$\therefore 63 + 4 = 67, 126 + 2 = 128$$

6. 다음 조건을 만족하는 x, y 를 바르게 구한 것은?

- ㉠

$40 < x < 60$ 인 자연수 x 에 대하여 $\frac{x}{130}$ 는
유한소수이다.
- ㉡

$\frac{x}{130}$ 를 기약분수로 고치면 $\frac{2}{y}$ 이다.

- ①

$x = 52, y = 10$
- ②

$x = 52, y = 13$
- ③

$x = 52, y = 5$
- ④

$x = 65, y = 5$
- ⑤

$x = 65, y = 2$

해설

$\frac{x}{130} = \frac{x}{2 \times 5 \times 13}$ 이 유한소수이므로, x 는 13 의 배수이고
 $40 < x < 60$ 인 자연수이므로 $x = 52$ 이다.
따라서 기약분수로 고치면 $\frac{52}{130} = \frac{4 \times 13}{2 \times 5 \times 13} = \frac{2}{5} = \frac{2}{y}$ 가 되므
로 $y = 5$ 이다.

7. $x = \frac{4}{9}$ 일 때, $x - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ 의 값을 순환소수로 나타내려고 한다. 이때,

순환마디를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} &= x - \frac{1}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \\&= x - \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \\&= x - \frac{x}{x-1}\end{aligned}$$

x 의 값을 대입하면

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{-\frac{5}{4}} = \frac{4}{9} + \frac{4}{5} = \frac{56}{45} = 1.24444\cdots$$

따라서 순환마디는 4이다.

8. 분수 $\frac{2}{7}$ 를 x 라 할 때, $x \times (10^6 - 1)$ 의 값은 몇 자리 정수인지 구하여라.

▶ 답 : 자리

▷ 정답 : 6 자리

해설

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4} = \frac{285714}{999999}$$
$$x \times (10^6 - 1) = \frac{285714}{999999} \times 999999 = 285714$$

9. 7의 배수가 아닌 자연수 k 에 대하여 $\frac{k}{7}$ 를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 n 번째 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 정의한다. 임의의 k ($k \geq 4$)에 대하여 $\frac{f(k+3)f(2k)}{f(2k+6)f(k-3)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{4}{7} = 0.\dot{5}7142\dot{8}$, $\frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}$, $\frac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}$, ... 와 같이

7의 배수가 아닌 k 에 대하여 $\frac{k}{7}$ 는 소수점 아래 첫째 자리부터

여섯째 자리까지를 순환마디로 하는 순환소수이다.

따라서

$$f(k+3) = f(k-3), f(2k) = f(2k+6)$$

$$\therefore \frac{f(k+3)f(2k)}{f(2k+6)f(k-3)} = \frac{f(k+3)}{f(k-3)} \times \frac{f(2k)}{f(2k+6)} = 1 \times 1 = 1$$

10. 1 보다 작은 분수 $\frac{14}{a}$ 를 소수로 나타내면 소수 첫째 자리의 숫자가 3 이고 유한소수가 될 때, 자연수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$$0.3 \leq \frac{14}{a} < 0.4$$

$$\frac{3}{10} \leq \frac{14}{a} < \frac{4}{10}$$

자연수 a 의 범위를 구하면 $35 < a \leq 46.\dot{6}$ 이다.

a 는 2 와 5 이외의 인수를 가지지 않으므로 40 이다.

11. 두 순환소수 $0.\dot{a}2\dot{b}$ 와 $0.\dot{a}b\dot{2}$ 의 합이 $\frac{307}{333}$ 일 때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 4$

▷ 정답 : $b = 9$

해설

$$\frac{100a + 20 + b}{999} + \frac{100a + 10b + 2}{999} = \frac{307}{333}$$

$$200a + 11b + 22 = 921$$

$$200a + 11b = 899$$

$$11b < 100 \text{ 이므로 } 200a = 800$$

$$\therefore a = 4, b = 9$$

12. $1.4\dot{2}$ 에 어떤 기약분수 A 를 곱하였더니 $4.\dot{8}\dot{8}$ 이 되었다. A 의 값을 분수로 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{55}{16}$

해설

$$1.4\dot{2} \times A = 4.\dot{8}\dot{8} ,$$

$$A = \frac{484}{99} \times \frac{90}{128} = \frac{55}{16}$$

13. $x \odot y = \begin{cases} x \neq y \text{이면 } -2 \\ x = y \text{이면 } 2 \end{cases}$ 라 할 때,

$a = \frac{1}{90}$, $b = 0.1$, $c = \frac{1}{10}$, $d = 0.09$ 에 대하여 $(a \odot b) \odot (c \odot d)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$a = \frac{1}{90}, b = \frac{1}{10}, c = \frac{1}{10}, d = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

$$a \neq b, c = d, (a \odot b) \odot (c \odot d) = -2 \odot 2 = -2$$

14. $x = 0.8\dot{3}$ 일 때, $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = 0.0\dot{5} \times x$ 를 만족하는 a 의 값을

구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{103}{105}$

해설

$$x = 0.8\dot{3} = \frac{5}{6}, \quad 0.0\dot{5} \times x = \frac{1}{18} \times x = \frac{1}{18} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{108} \text{ 이므로}$$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{5}{108}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = 1 - \frac{5}{108} = \frac{103}{108}$$

$$1 - \frac{1}{a} = \frac{108}{103}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = 1 - \frac{108}{103} = -\frac{105}{103}$$

$$\therefore a = -\frac{103}{105}$$

15. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ① 정수와 무한소수의 합은 순환소수이다.
- ② 유한소수와 순환소수의 합은 순환소수이다.
- ③ 무한소수와 순환소수의 합은 순환소수이다.
- ④ 자연수와 유한소수의 합은 유한소수이다.
- ⑤ 유한소수와 무한소수의 합은 유한소수이다.

해설

- ① 정수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
- ③ 무한소수와 순환소수의 합은 무한소수이다.
- ⑤ 유한소수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.

16. $4^{2a-1} \times 8^{a-2} = 16^{a+1}$ 을 만족하는 a 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$(2^2)^{2a-1} \times (2^3)^{a-2} = (2^4)^{a+1}$$

$$4a - 2 + 3a - 6 = 4a + 4$$

$$\therefore a = 4$$

17. $16^{3x+2} = 4^{x-6}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$16^{3x+2} = (4^2)^{3x+2} = 4^{x-6} \text{ 이므로}$$

$$6x + 4 = x - 6$$

$$5x = -10$$

$$\therefore x = -2$$

18. $9^{x+2} = 3^{2x} \times 3^y$ 에서 y 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$9^{x+2} = (3^2)^{x+2} = 3^{2x+4} = 3^{2x+y}$$

$$2x + 4 = 2x + y$$

$$\therefore y = 4$$

19. $27^5 \div 3^{5n} = 3^5$ 일 때, n 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(3^3)^5 \div 3^{5n} = 3^5 \text{ 이므로 } 15 - 5n = 5$$

$$\therefore n = 2$$

20. $(x^a y^b z^c)^n = x^{28} y^{42} z^{70}$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 최대일 때, $a + 2b - c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 28 \ 42 \ 70} \\ 7 \overline{) 14 \ 21 \ 35} \\ \underline{2 \quad 3 \quad 5} \end{array}$$

28 , 42 , 70 의 최대공약수가 14 이므로 $n = 14$ 이다.

$$x^{28} y^{42} z^{70} = (x^a y^b z^c)^{14}$$

$$a = 2, \ b = 3, \ c = 5$$

$$\therefore a + 2b - c = 2 + 6 - 5 = 3$$

21. $a^{-3} = \frac{1}{2}$ 이고, $\frac{a^{-3}}{a} = pa^q$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$

해설

$$a^{-3} = \frac{1}{2} \text{ 에서 } \frac{1}{a^3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a^{-3}}{a} = \frac{\frac{1}{a^3}}{a} = \frac{1}{a^3} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2} a^{-1} = pa^q$$

$$\therefore p = \frac{1}{2}, q = -1, p + q = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

22. 등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-14x} = 81^{3x+1}$ 이 성립하도록 x 값을 정할 때, 다음에서 x 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

양변의 밑이 3 이 되도록 바꾸면,

$$(3^{-1})^{2-14x} = (3^4)^{3x+1}$$

$$3^{-2+14x} = 3^{12x+4}$$

이므로 $-2 + 14x = 12x + 4$ 이다.

따라서 $x = 3$ 이다.

23. $\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2$ 의 값을 2 의 거듭제곱으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2^8

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{16^4 + 4^{11}}{8^4 + 4^9}\right)^2 &= \left(\frac{(2^4)^4 + (2^2)^{11}}{(2^3)^4 + (2^2)^9}\right)^2 \\&= \left(\frac{2^{16} + 2^{22}}{2^{12} + 2^{18}}\right)^2 \\&= \left(\frac{2^{16}(1 + 2^6)}{2^{12}(1 + 2^6)}\right)^2 \\&= \left(\frac{2^{16}}{2^{12}}\right)^2 \\&= (2^4)^2 = 2^8\end{aligned}$$

24. $58^{2009} \times 35^{2009}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

58 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 8 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자와 같으므로, 8, 4, 2, 6 이 반복된다.
따라서 58^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 8
35 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 5 의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자와 같으므로
 35^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 5
 $\therefore 58^{2009} \times 35^{2009}$ 의 일의 자리의 숫자는 8×5 의 일의 자리의 숫자인 0이다.

25. $2^{10} \approx 10^3$ 일 때, 25^{10} 은 몇 자리 자연수인지 구하여라.

▶ 답 : 자리

▷ 정답 : 15자리

해설

$2^{10} \approx 10^3$ 이므로

$$\begin{aligned} 25^{10} &= (5^2)^{10} = 5^{20} = \left(\frac{10}{2}\right)^{20} = \frac{10^{20}}{2^{20}} = \frac{10^{20}}{(2^{10})^2} \\ &\approx \frac{10^{20}}{(10^3)^2} = \frac{10^{20}}{10^6} = 10^{14} \end{aligned}$$

따라서 $25^{10} = 10^{14}$ 은 15 자리의 자연수이다.

26. $3^{2009} + 7^{2009}$ 을 10 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ 을 10 으로 나눈 나머지는
 $3, 9, 7, 1, \dots$ 과 같이 반복되고,
 $7, 7^2, 7^3, 7^4, \dots$ 을 10 으로 나눈 나머지는
 $7, 9, 3, 1, \dots$ 과 같이 반복된다.
 $2009 = 4 \times 502 + 1$ 이므로 3^{2009} 을 10 으로 나눈 나머지는 3 을
10 으로 나눈 나머지 3과 같고,
 7^{2009} 을 10 으로 나눈 나머지는 7 을 10 으로 나눈 나머지 7 과
같다.
따라서 $3^{2009} + 7^{2009}$ 을 10 으로 나누면 $3 + 7 = 10$ 에서 나머지는
0 이다.

27. $3^m(3^n + 1) = 2430$ 을 만족하는 양의 정수 m, n 에 대하여 $m \times n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$2430 = 243 \times 10 = 3^5 \times (3^2 + 1)$$

$$m = 5, n = 2$$

$$\therefore m \times n = 10$$

28. $a = 8^2$, $b = 9^4$ 이라 할 때, $(a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5} = 2^n \times 3^m$

이 성립한다. 이때, $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$(a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5}$$

$$= 2^n \times 3^m$$

$$= a^{-3}b^6 \times a^6b^6 \times a^4b^{-5}$$

$$= \frac{b^6}{a^3} \times a^6b^6 \times \frac{a^4}{b^5} = (ab)^7$$

따라서 $a = 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, $b = 9^4 = (3^2)^4 = 3^8$ 을 주어진 식에 대입하면

$$(ab)^7 = (2^6 \times 3^8)^7 = 2^{42} \times 3^{56}$$

따라서 $n = 42$, $m = 56$ 이므로 $m - n = 14$ 이다.

29. 밑면의 반지름의 길이가 r 이고, 높이가 h 인 원뿔이 있다. 이 원뿔의 밑면의 반지름은 10% 늘리고, 높이는 10% 줄이면 부피는 원래 부피보다 몇 % 변화하는지 구하여라.

▶ 답: %

▶ 정답 : 8.9 %

해설

$$(\text{처음 원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(변화된 원뿔의 부피)

$$= \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{110}{100} \times r \right)^2 \times \left(\frac{90}{100} \times h \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{11^2}{10^2} \times \frac{9}{10} \times \pi r^2 h$$

$$= \frac{1089}{1000} \times \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h \right)$$

변화된 원뿔의 부피는 처음 원뿔의 부피의 $\frac{1089}{1000}$ 배이므로 변화된

부피는

$$\left(\frac{1089}{1000} - 1\right) \times 100 = 8.9(\%) \text{ 이다.}$$

30. 자연수 n 에 대하여 $f_n(x) = nx^n + (n-1)x^{n-1} + (n-2)x^{n-2} + \cdots + 1$ 이라 할 때, $f_{100}(-1) - f_{99}(-1) + f_{98}(-1) - f_{97}(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 198

해설

$$\begin{aligned} f_{100}(-1) &= 100(-1)^{100} + 99(-1)^{99} + 98(-1)^{98} + \cdots + 1 \\ f_{99}(-1) &= 99(-1)^{99} + 98(-1)^{98} + 97(-1)^{97} + \cdots + 1 \\ f_{98}(-1) &= 98(-1)^{98} + 97(-1)^{97} + 96(-1)^{96} + \cdots + 1 \\ f_{97}(-1) &= 97(-1)^{97} + 96(-1)^{96} + 95(-1)^{95} + \cdots + 1 \\ \therefore f_{100}(-1) - f_{99}(-1) + f_{98}(-1) - f_{97}(-1) &= 100 + 98 = 198 \end{aligned}$$

31. $(x-1)^{99}$ 을 전개했을 때, x^{49} 의 계수를 a , x^{50} 의 계수를 b 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x-1)^{99}$ 의 전개식에서 항은 100 개이고 계수들은 좌우대칭이 된다. 따라서 x^{49} 의 계수와 x^{50} 의 계수는 절댓값이 같고, 부호만 다르다.

$$\therefore a+b=0$$

32. 모서리의 길이가 x, y 인 정육면체 각각 1 개와 8 개, 가로와 세로의 길이가 x 이고 높이는 y 인 직육면체 6 개, 가로의 길이가 x 이고 세로의 길이와 높이가 각각 y 인 직육면체 12 개로 정육면체를 만들었다. 이렇게 만들어진 정육면체의 모서리의 길이가 $(ax + by)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

각각의 입체도형의 부피를 구하면
(모서리의 길이가 x 인 정육면체 1 개의 부피) $= x^3$
(모서리의 길이가 y 인 정육면체 8 개의 부피) $= 8y^3$
(가로와 세로의 길이가 x 이고 높이는 y 인 직육면체 6 개의 부피)
 $= 6x^2y$
(가로의 길이가 x 이고 세로의 길이와 높이가 y 인 직육면체 12 개의 부피) $= 12xy^2$
(모서리의 길이가 $(ax + by)$ 인 정육면체의 부피)
 $= (ax + by)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + b^3y^3$
정육면체를 만들고 있는 네 개의 입체도형의 부피의 합은 만들어진 정육면체의 부피와 같으므로
 $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$
 $= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = (x + 2y)^3$
 $\therefore a = 1, b = 2 \quad \therefore a + b = 3$

33. 자연수 x 를 7 로 나누면 4 가 남고, 자연수 y 를 7 로 나누면 5 가 남는다. xy 를 7 로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 를 7 로 나누었을 때의 몫을 a , y 를 7 로 나누었을 때의 몫을 b 라고 하면

$$x = 7a + 4, y = 7b + 5$$

$$\begin{aligned}\therefore xy &= (7a + 4)(7b + 5) \\ &= 49ab + 35a + 28b + 20 \\ &= 7(7ab + 5a + 4b + 2) + 6\end{aligned}$$

따라서 xy 를 7 로 나눈 나머지는 6 이다.

34. $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, $x + y + z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 일 때, xyz 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\&= 3^2 - 2(xy + yz + zx) = 2\end{aligned}$$

$$\therefore xy + yz + zx = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z) \{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)\} + 3xyz \\&= 3 \left(2 - \frac{7}{2} \right) + 3xyz\end{aligned}$$

$$3 = 3 \left(2 - \frac{7}{2} \right) + 3xyz$$

$$3xyz = 3 + \frac{9}{2}$$

$$\therefore xyz = \frac{5}{2}$$

35. $a + b + c = 5$ 이고, $ab + bc + ca = 1$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= 5^2 - 2 \times 1 = 23 \end{aligned}$$

36. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 6$ 일 때, $a^3 - b^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{125}$

해설

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 4, \frac{b-a}{ab} = 4, a-b = -4ab \cdots \textcircled{A}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 6, \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = 6, a^2+b^2 = 6a^2b^2$$

$$(a-b)^2 + 2ab = 6a^2b^2 \cdots \textcircled{B}$$

ⓐ을 ⓑ에 대입하면

$$(a-b)^2 + 2ab = (-4ab)^2 + 2ab = 6a^2b^2$$

$$2ab(5ab+1) = 0$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{5} (\because ab \neq 0) \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{C} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } a-b = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{125} \end{aligned}$$

37. $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 3$ 일 때, $x^6 + y^6$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{99}{4}$

해설

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \quad x^2 + y^2 = 3 \\(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\2^2 &= 3 + 2xy \\\therefore xy &= \frac{1}{2} \\x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\&= 2^3 - 3 \times \frac{1}{2} \times 2 = 5 \\\therefore x^6 + y^6 &= (x^3)^2 + (y^3)^2 \\&= (x^3 + y^3)^2 - 2(xy)^3 \\&= 5^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{99}{4}\end{aligned}$$

38. $(a + b + c - d)(-a + b + c + d) + (a + b - c + d)(a - b + c + d)$ 를 전개하면?

① $2ad + 2bc$

② $3ad + 3bc$

③ $4ad + 4bc$

④ $3ad - 3bc$

⑤ $4ad - 4bc$

해설

$$\begin{aligned} & (a + b + c - d)(-a + b + c + d) + (a + b - c + d)(a - b + c + d) \\ &= \{(b + c) + (a - d)\}\{(b + c) - (a - d)\} + \{(a + d) + (b - c)\}\{(a + d) - (b - c)\} \\ &= (b + c)^2 - (a - d)^2 + (a + d)^2 - (b - c)^2 \\ &= b^2 + 2bc + c^2 - a^2 + 2ad - d^2 + a^2 + 2ad + d^2 - b^2 + 2bc - c^2 \\ &= 4ad + 4bc \end{aligned}$$

39. $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=a3^b-2^c$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

$$\begin{aligned} & (3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) \\ &= a3^b-2^c \text{ 에서 양변에 } (3-2) \text{ 를 곱하면} \\ & (3-2)(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = (3-2)(a3^b-2^c) \\ & (3^2-2^2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b-2^c \\ & (3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16}) = a3^b-2^c \\ & 3^{32}-2^{32} = a3^b-2^c \\ \therefore a=1, b=32, c=32 \\ \therefore a+b+c=65 \end{aligned}$$

40. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 일 때, $x(x+1) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면 $x - 3 + \frac{1}{x} = 0$ 이다.

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 3$$

주어진 식을 정리하면

$$x(x+1) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = x^2 + x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

이므로

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 9,$$

$$\therefore x(x+1) + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(x + \frac{1}{x} \right) = 9 + 3 = 12$$

41. $a+b+c=-1$, $ab+bc+ca=-6$, $abc=3$ 일 때, $\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$

의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{14}{3}$

해설

$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$ 에서

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$$

$$= (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$$

$$= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)$$

$$= (-6)^2 - 2 \times 3 \times (-1) = 42$$

$$\therefore \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$$

42. $xy = 3$, $|x| - |y| = 1$ 일 때, $(x + y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$(|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy| \text{ 이므로}$$

$$1 = x^2 + y^2 - 6$$

$$x^2 + y^2 = 7$$

$$\therefore (x + y)^2 = 7 + 6 = 13$$

43. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{3}{4}$ 일 때, $x^2 + y^2 + 1$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{289}{144}$

해설

$x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{3}{4}$ 일 때,

$x + y = \frac{17}{12}$, $xy = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore x^2 + y^2 + 1 &= (x + y)^2 - 2xy + 1 \\ &= \left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{289}{144}\end{aligned}$$

44. $A = 3^a$ 일 때, $B(A) = a + 1$ 이라고 정의하자. 자연수 n 에 대하여 $B\left(\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$81 = 3^4$, $243 = 3^5$ 이고 주어진 식을 분배법칙을 이용하여
공통인수로 묶으면

$$\begin{aligned}\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3} &= \frac{9\{(3^4)^4 - (3^5)^3\}}{(2 \times 3) \times (3^5)^3} \\ &= \frac{3(3^{16} - 3^{15})}{3(3^{16} - 3^{15})} \\ &= \frac{2 \times 3^{15}}{2 \times 3^{15}} = 3\end{aligned}$$

$$(\because 3^{16} - 3^{15} = 3 \times 3^{15} - 3^{15} = 2 \times 3^{15})$$

$$\therefore B\left(\frac{9 \times 81^4 - 9 \times 243^3}{6 \times 243^3}\right) = B(3) = 1 + 1 = 2$$

45. $\frac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5} = mx + n$ 일 때, 정수 m, n 의 값을 구하여라. (단, $x \neq -5$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 2$

▷ 정답 : $n = -3$

해설

$$\frac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5} = mx + n$$

양변에 $(x + 5)$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 15 &= (mx + n)(x + 5) \\ &= mx^2 + (5m + n)x + 5n \end{aligned}$$

따라서 $m = 2, n = -3$

46. $2x = 3y$ 일 때, $\frac{6x^3 - 6x^2y}{2x^3 + 3x^2y}$ 의 값을 구하여라. (단, $x \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{6x^3 - 6x^2y}{2x^3 + 3x^2y} &= \frac{6x^3 - 2x^2 \cdot 3y}{2x^3 + x^2 \cdot 3y} \\ &= \frac{6x^3 - 2x^2 \cdot 2x}{2x^3 + x^2 \cdot 2x} \\ &= \frac{2x^3}{4x^3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

47. $x : y = 3 : 4$ 일 때, $\frac{5x^2}{2x^2 + 3y^2} - \frac{y^2}{3x^2 - y^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{17}{22}$

해설

$$x : y = 3 : 4$$

$$3y = 4x$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{5x^2}{2x^2 + 3 \times \frac{16}{9}x^2} - \frac{\frac{16}{9}x^2}{3x^2 - \frac{16}{9}x^2} \\&= \frac{5x^2}{\frac{22}{3}x^2} - \frac{\frac{16}{9}x^2}{\frac{11}{9}x^2} \\&= \frac{3}{22} - \frac{16}{11} \\&= -\frac{17}{22}\end{aligned}$$

48. 0 이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $yz = \frac{1}{x}$ 일 때, $\frac{x}{1+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{1+z+zx}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$yz = \frac{1}{x}$ 에서 $xyz = 1$ 을 주어진 식에 대입하여 분모를 $1+y+yz$ 로 통일하면

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{x}}{xyz+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{z}{xyz+z+zx} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{1}{1+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{xyz}{xyz+x+xy} \\ &= \frac{1}{1+y+yz} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{yz}{1+y+yz} \\ &= \frac{1+y+yz}{1+y+yz} = 1 \end{aligned}$$

49. $x + y : y + z : z + x = 3 : 4 : 5$ 일 때, $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{23}{6}$

해설

$x + y : y + z : z + x = 3 : 4 : 5$ 에서

$x + y = 3k, y + z = 4k, z + x = 5k$ 라 두면

$2(x + y + z) = 12k, x + y + z = 6k$

따라서 $x = 2k, y = k, z = 3k$

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} &= \frac{2k}{k} + \frac{k}{3k} + \frac{3k}{2k} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{12 + 2 + 9}{6} = \frac{23}{6}\end{aligned}$$

50. $a : b = x : y$ 일 때, $\frac{\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2}}{\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = k \text{ 라 하면}$$

$$a = xk, b = yk$$

$$\frac{\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2}}{\frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}} = \frac{\frac{(xk)^3}{x^2} + \frac{(yk)^3}{y^2}}{\frac{(xk+yk)^3}{(x+y)^2}} = \frac{(x+y)k^3}{(x+y)k^3} = 1$$