

1. 좌표평면 위의 두 점 (2, 2), (9, 9) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$

② 5

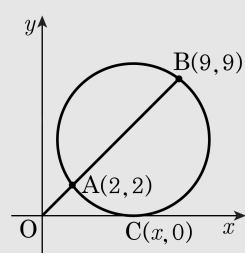
③ $\frac{11}{2}$

④ 6

⑤ $\frac{13}{2}$

해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 9^2} = 36 \quad x = 6$$

2. x, y 에 관한 이차방정식 $2x^2 - 3xy + ay^2 - 2x + 9y + b = 0$ 이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab 를 구하면?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
 $px + qy + r = 0 \cdots \textcircled{A}$,
 $p'x + q'y + r' = 0 \cdots \textcircled{B}$ 이라 하자.
 $\textcircled{A}$ 과 $\textcircled{B}$ 은 서로 직교하므로
 $pp' + qq' = 0$ 이다.
(준식) $= (px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0$ 의
전개식에서 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 합은
 $pp' + qq' = 0$ 이므로 $a + 2 = pp' + qq' = 0$
 $\therefore a = -2$
 $a = -2$ 를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
 $= 2x^2 - (3y + 2)x + (-2y^2 + 9y + b) = 0 \cdots \textcircled{C}$
 $\textcircled{C}$ 이 두 직선의 곱을 나타내므로
 $\textcircled{C}$ 의 판별식 $D_1 = (3y + 2)^2 - 8(-2y^2 + 9y + b)$
 $= 25y^2 - 60y + (4 - 8b) \cdots \textcircled{D}$ 이 완전제곱식이다.
따라서 $\textcircled{D}$ 의 판별식 $\frac{D_2}{4}$ 는 0이다.
 $\frac{D_2}{4} = 30^2 - 25(4 - 8b) = 0$
 $\therefore b = -4$
 $\therefore ab = (-2) \cdot (-4) = 8$

3. 점 A(6, 2)와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P (a , b)라 하면 $a+2b-2=0 \cdots \textcircled{1}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x , y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a+18}{1+3}, \frac{b+6}{1+3} \right)$$

$$x = \frac{a+18}{1+3}, y = \frac{b+6}{1+3}$$

$$a = 4x-18, b = 4y-6$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$$

4. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

$\neg$ $a + bm = 0$

$\angle$ $p + qm = 0$

$\ominus$ $ap + bq = 0$

- $\textcircled{1}$

 $\neg$
- $\textcircled{2}$ $\angle$
- $\textcircled{3}$ $\angle, \ominus$
- $\textcircled{4}$ $\neg, \ominus$
- $\textcircled{5}$ $\neg, \angle, \ominus$

해설

$y = mx + n \cdots \textcircled{1}$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{2}$

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots \textcircled{3}$

I) $\textcircled{1} // \textcircled{2} : m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

II) $\textcircled{1} \perp \textcircled{3} : m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$

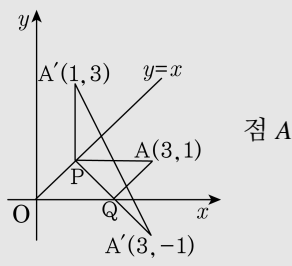
$\therefore mp - q = 0$

5. 정점 $A(3, 1)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최소거리를 구하면?

- ① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A 의 $y = x$ 에 대한 대칭점을 A' ,



의 x 축에 대한 A'' 라 하면,

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''}$$

$$\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

6. 다음 방정식으로 표시되는 그래프는 m 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다.
그 점의 좌표가 (a,b) 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a < 0, b < 0$)

$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1)m + (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3) = 0$

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

m 의 값에 관계없이 다음 두 원의 교점을 지난다.

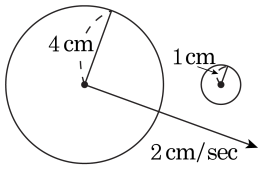
$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$,

$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

연립하여 풀면 $(x,y) = (-3,-2), (1,-2)$

그러므로 $(a,b) = (-3,-2)$

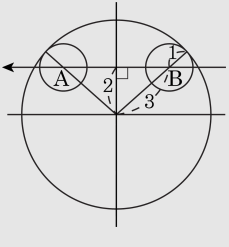
7. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



- ① 1 초 ② $\sqrt{2}$ 초 ③ $\sqrt{3}$ 초
 ④ 2 초 ⑤ $\sqrt{5}$ 초

해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
 내접해야 하므로,
 $\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5}$ 이고,
 2cm/s로 움직이므로,
 $\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ (초) 가 된다.



8. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

9. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?
- ① $(3, -1)$ ② $(2, 1)$ ③ $(4, 2)$
④ $(-3, -2)$ ⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \cdots \textcircled{1}$ 이라 하면,
 $\textcircled{1}$ 은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면
 $A = -4$, $B = -2$, $C = -20$
따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$
즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

10. a 를 임의의 실수라 하고, 원 $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay + 8a - 15 = 0$ 의 넓이가 최소가 될 때, 원점에서 이 원의 중심까지의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

원의 넓이가 최소가 되려면 반지름이 최소가 되어야 한다.

$$\begin{aligned}(x+a)^2 + (y-a)^2 &= 2a^2 - 8a + 15 \\ &= 2(a-2)^2 + 7 \\ &= (\text{반지름})^2\end{aligned}$$

따라서 $a = 2$ 일 때, 반지름은 최소이고

원의 중심은 $(-a, a) = (-2, 2)$

$\therefore$ (원점에서 중심까지의 거리)

$$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

11. 두 정점 A(-3, 0), B(3, 0) 과 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 P(a , b) 를 잡아 $\triangle PAB$ 를 만들 때, $\triangle PAB$ 의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

- ① $\frac{5}{3}\pi$ ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{10}{3}\pi$ ⑤ $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 P(a , b) 는 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위에 있으므로
 $a^2 + b^2 - 8b - 9 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표를 (x , y) 라고 하면,

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 3x, b = 3y$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(3x)^2 + (3y)^2 - 8(3y) - 9 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y = 1$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}$$

$$\therefore l = 2\pi r = 2 \times \frac{5}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

12. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

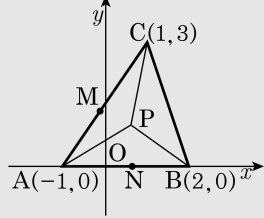
$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
 $\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$
 $\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
 $\Rightarrow \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$
 $\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$

13. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

- ① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

$$\text{그런데 } M\left(0, \frac{3}{2}\right), N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\text{점 } P \text{의 자취 } \overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

14. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} < m < 1$ ② $-\frac{1}{3} < m < 1$
 ③ $-1 < m < 2$ ④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$
 ⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

제1사분면에서 내려면 $\textcircled{1}$ 의 기울기 m

은

$\textcircled{L}$ 의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$ 보다 작고

$\textcircled{R}$ 의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$

