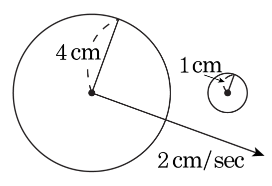
1. 반지름의 길이가 1 cm 인 원에 반지름의 길이가 4 cm 인 원이 초속 2 cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2 cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1 cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4 cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?

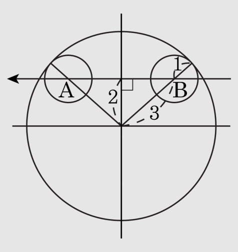


① 1 초　　② $\sqrt{2}$ 초　　③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초　　⑤ $\sqrt{5}$ 초

해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는 내접해야 하므로,
$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9-4} = 2\sqrt{5}$ 이고,
2 cm/s 로 움직이므로,
$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$(초) 가 된다.



2. 실수 x, y 가 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ 을 만족할 때, x^2+y^2 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a+b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{17}$ ④ 16 ⑤ 28

해설

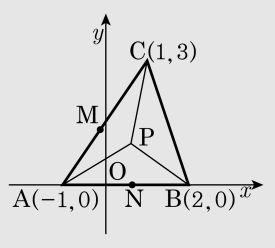
$x^2+y^2=k$ 인 원을 생각해보면,
두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.
$\Rightarrow$ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{k}$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}-1)^2$
$\Rightarrow$ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차
$\Rightarrow$ $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{k}-1$ $\therefore$ $k=(\sqrt{13}+1)^2$
$\therefore$ k 의 합은 $(\sqrt{13}-1)^2+(\sqrt{13}+1)^2=28$

3. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\sqrt{10}$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore\ \triangle BPC = \frac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

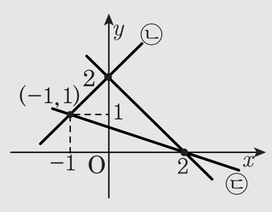
점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

4. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$
② $-\frac{1}{3}<m<1$
③ $-1<m<2$
④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$
⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0 \cdots$ ㉠
$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서
이 직선은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-1,1)$ 을 지난다.
다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$ 와
제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m 은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고
㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.
$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

5. 직선 $y = mx + n(m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$	㉡ $p + qm = 0$	㉢ $ap + bq = 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots ①$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots ②$

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots ③$

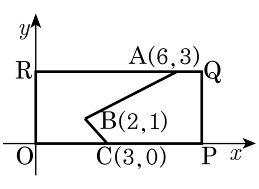
Ⅰ) ① // ② : $m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

Ⅱ) ①⊥③ : $m\left(-\frac{p}{q}\right) = -1$

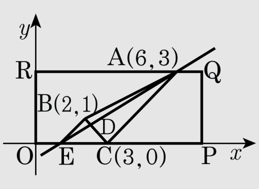
$\therefore mp - q = 0$

6. $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$와 평행한 보조선 $\overline{BE}$를 긋는다.

$\overline{AC} // \overline{BE}$이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기)$=$ (직선 BE의 기울기)$= 1$

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은

$y = x - 1$이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE 의 기울기)$= \frac{3}{5}$

7. 두 점 $(2,\ 3)$, $(1, 2)$를 지나는 직선 위에 두 직선 $y-3x-4=0$, $y-ax-2=0$의 교점이 있다고 할 때, a의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{4}{3}$　　③ $\frac{5}{3}$　　④ $\frac{8}{3}$　　⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로
두 점 $(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$를 지나는
직선과 직선 $y-3x-4=0$의 교점이
직선 $y-ax-2=0$ 위에 있다.
두 점 $(2,\ 3)$, $(1, 2)$를 지나는 직선은

$$y-2=\frac{3-2}{2-1}(x-1)$$

$\therefore\ y=x+1$

따라서 두 직선

$y-3x-4=0$과 $y=x+1$의 교점은 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

교점이 $y-ax-2=0$ 위에 있으므로

$$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}a-2=0$$

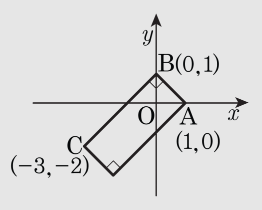
$\therefore\ a=\frac{5}{3}$

8. $x,\ y$ 에 대한 방정식 $xy+x+y-1=0$ 을 만족시키는 정수 $x,\ y$ 를 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$ 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

① 2　　② 6　　③ 8　　④ $3\sqrt{2}$　　⑤ $4\sqrt{2}$

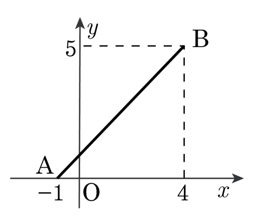
해설

$xy+x+y-1=0$ 에서 $(x+1)(y+1)=2\cdots$㉠ 이고,$x,\ y$ 는 정수이므로
㉠ 을 만족하는 정수해를 순서쌍으로 나타내면 $(0,\ 1),\ (1,\ 0),(-2,-3),\ (-3,-2)$ 이다.
네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는
$\overline{AB}\times\overline{BC}=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$

9. 두 점 A(−1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



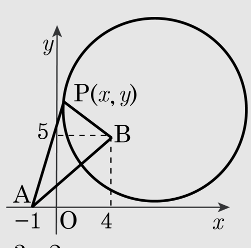
① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$ ② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$ ④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

해설

점 P를 (x, y)라 두면



$\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$이므로

$\sqrt{(x+1)^2+y^2} : \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} = 3 : 2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$