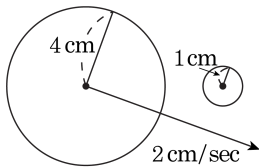


1. 반지름의 길이가 1cm 인 원에 반지름의 길이가 4cm 인 원이 초속 2cm 의 속도로 그림과 같이 직선 방향으로 진행한다고 한다. 두 원의 중심거리의 최단거리는 2cm 라 할 때, 반지름의 길이가 1cm 인 원 전체가 몇 초동안 반지름의 길이 4cm 인 원 안에 완전히 품기게 되는가?



① 1 초

② $\sqrt{2}$ 초

③ $\sqrt{3}$ 초

④ 2 초

⑤ $\sqrt{5}$ 초

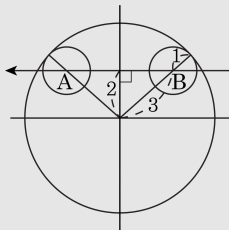
해설

작은 원이 큰 원 안에 포함되기 위해서는
내접해야 하므로,

$$\overline{AB} = 2 \times \sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5} \text{ 이고,}$$

2 cm/s로 움직이므로,

$$\frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}(\text{초}) \text{ 가 된다.}$$



2. 실수 x, y 가 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 을 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a + b$ 를 구하면?

① $2\sqrt{7}$

② $2\sqrt{13}$

③ $2\sqrt{17}$

④ 16

⑤ 28

해설

$x^2 + y^2 = k$ 인 원을 생각해보면,

두 원이 외접할 때 k 가 최소, 내접할 때 k 가 최대가 된다.

⇒ 외접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 합

⇒ $\sqrt{3^2 + 2^2} = 1 + \sqrt{k} \quad \therefore k = (\sqrt{13} - 1)^2$

⇒ 내접 : 중심사이의 거리 = 반지름의 차

⇒ $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{k} - 1 \quad \therefore k = (\sqrt{13} + 1)^2$

$\therefore k$ 의 합은 $(\sqrt{13} - 1)^2 + (\sqrt{13} + 1)^2 = 28$

3. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(2,0)$, $C(1,3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P 가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P 가 그리는 도형의 길이는?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$

② $\sqrt{2}$

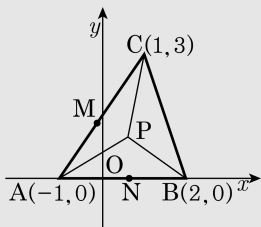
③ 2

④ $\sqrt{10}$

⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P 가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$$\therefore \triangle BPC = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

점 P 는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M , N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

점 P 의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

4. 두 직선 $mx - y + m + 1 = 0$ 과 $y = -x + 2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} < m < 1$

② $-\frac{1}{3} < m < 1$

③ $-1 < m < 2$

④ $m < -\frac{1}{3}, m > 1$

⑤ $-1 < m < -\frac{1}{3}$

해설

$$mx - y + m + 1 = 0 \cdots \textcircled{A}$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - (y-1) = 0 \text{ 에서}$$

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

다음 그림에서 $\textcircled{A}$ 이 직선 $y = -x + 2$

와

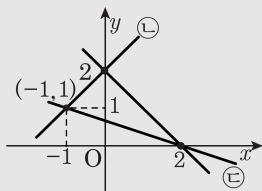
제1사분면에서 내려면 $\textcircled{A}$ 의 기울기 m

은

$\textcircled{B}$ 의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)} = 1$ 보다 작고

$\textcircled{C}$ 의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$$\therefore -\frac{1}{3} < m < 1$$



5. 직선 $y = mx + n (m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$

㉡ $p + qm = 0$

㉢ $ap + bq = 0$

㉠ ㉠

㉡ ㉡

㉢ ㉡, ㉢

㉣ ㉠, ㉢

㉤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$y = mx + n \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{2}$$

$$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots \textcircled{3}$$

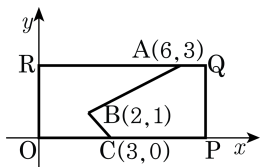
$$\text{I) } \textcircled{1} // \textcircled{2} : m = -\frac{a}{b}$$

$$\therefore a + bm = 0$$

$$\text{II) } \textcircled{1} \perp \textcircled{3} : m \left(-\frac{p}{q} \right) = -1$$

$$\therefore mp - q = 0$$

6. $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 는 직사각형 OPQR을 두 부분으로 나누는 경계선이다. 이 경계선을 두 부분의 넓이의 변화 없이 점 A를 지나는 직선으로 바꿀 때, 이 직선의 기울기는?



① $\frac{1}{3}$

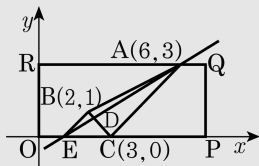
② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{5}{6}$

해설



$\overline{AC}$ 와 평행한 보조선 $\overline{BE}$ 를 긋는다.

$\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ 이므로 $\triangle ABC = \triangle AEC$,

$\triangle ABD = \triangle CDE$

따라서 $\overline{AE}$ 가 직선 경계임을 알 수 있다.

(직선 AC의 기울기) = (직선 BE의 기울기) = 1

점 B(2, 1)을 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은 $y = x - 1$ 이고 E(1, 0)임을 알 수 있다.

$\therefore$ (직선 AE의 기울기) = $\frac{3}{5}$

7. 두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선 위에 두 직선 $y - 3x - 4 = 0$, $y - ax - 2 = 0$ 의 교점이 있다고 할 때, a 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{8}{3}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

결국 세 직선의 교점이 일치하므로
두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는
직선과 직선 $y - 3x - 4 = 0$ 의 교점이
직선 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있다.
두 점 $(2, 3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선은

$$y - 2 = \frac{3 - 2}{2 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore y = x + 1$$

따라서 두 직선

$$y - 3x - 4 = 0 \text{과 } y = x + 1 \text{의 교점은 } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

교점이 $y - ax - 2 = 0$ 위에 있으므로

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}a - 2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

8. x, y 에 대한 방정식 $xy + x + y - 1 = 0$ 을 만족시키는 정수 x, y 를 좌표평면 위의 점 (x, y) 로 나타낼 때, 이 점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이는?

① 2

② 6

③ 8

④ $3\sqrt{2}$

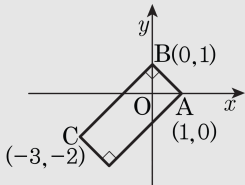
⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$xy + x + y - 1 = 0$ 에서 $(x+1)(y+1) = 2 \cdots \textcircled{7}$ 이고, x, y 는 정수이므로

$\textcircled{7}$ 을 만족하는 정수 해를 순서쌍으로 나타내면 $(0, 1), (1, 0), (-2, -3), (-3, -2)$ 이다.

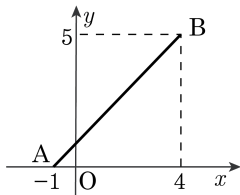
네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 그림과 같다.



사각형 $ABCD$ 는 직사각형이고 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$$

9. 두 점 $A(-1, 0)$, $B(4, 5)$ 에 대하여 두 점 A , B 로부터의 거리의 비가 $3 : 2$ 점 P 의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 50$

② $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 60$

③ $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 70$

④ $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 80$

⑤ $(x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$

해설

점 P 를 (x, y) 라 두
면

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2 \text{ 이 므}$$

로

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} : \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3 : 2$$

$$\text{정리하면 } (x-8)^2 + (y-9)^2 = 72$$

